Université d'Ottawa

Départment de Mathématiques et de Statistiques

MAT 1702C : Métodes mathématiques II

Professeur: Abdelkrim El basraoui

01 Octobre 2013

Nom ______________________ Prénom ______________________

d'étudiant______________________

Instructions:

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant en haut de chaque page dans l'espace précisé.
- La durée de cet examen est 80 minutes.
- Cet examen est un examen à livre fermé qui comporte **6 questions**.
- Utilisez l'espace spécifié pour répondre à chacune des questions. Si jamais l'espace ne vous suffit pas ou que vous utilisez l'endos de la page veuillez indiquer clairement où se trouve votre réponse ainsi que la suite du développement, s'il y a lieu.
- Vous devez justifier vos réponses.
- Les calculatrices ne sont pas permises.
- Vous avez une page supplémentaire à la fin que vous pouvez utiliser comme feuille de brouillon.

Bonne chance!

Ne rien inscrire dans la table suivante SVP.

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Maximum	4	4	3	3	5	5	24
Note							

1. [**4 points**] Déterminez si le système linéaire suivant est compatible ou incompatible. Vous devez spécifier vos étapes et justifier votre réponse. [N.B. vous **n'avez pas** besoin de résoudre le système s'il est compatible.]

$$\begin{cases} x_1 \;\; + 2x_2 = x_3 - 5x_4 + 1 \\ \qquad -2x_2 = 4x_4 + 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2x_3 - 6x_4 + 4 \end{cases}$$

2. [**4 points**] Déterminez les valeurs de h pour que $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ appartient à

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Autrement dit, cherchez les valeurs de h pour que $\overrightarrow{b}$ soit combinaison linéaire des vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. [**3 points**]

   i. Trouvez la solution générale de l'équation matricielle $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

   ii. En déduire la **forme paramétrique** de la solution générale.

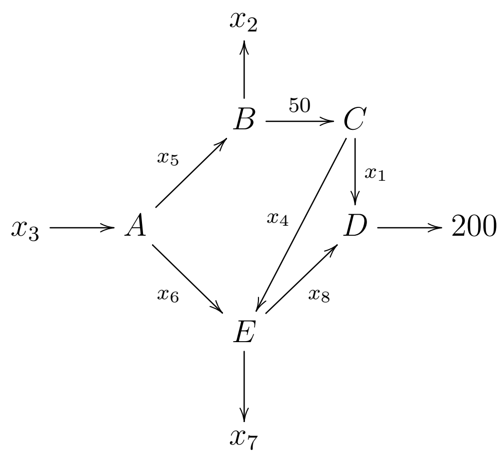
4. [**3 points**] Trouvez les valeurs de h and k pour que le système linéare suivant est **incompatible**.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & & = 1 \\ & x_2 & -2x_3 & = 0 \\ -2x_1 & +hx_2 & -x_3 & = k \end{array}\right.$$

5. [**5 points**] Déterminez si les vecteurs suivants sont linéairement dépendant ou linéairement indépendant. **S'ils sont linéairement dépendant** donnez une relation de dépendance; c'est-à-dire une relation non triviale entre ces vecteurs.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6. Considérer le réseau routier décrit par le diagrame suivant. Les lettres A à E dénotent les intersections. Les flèches indiquent le sens du trafic routier. Le nombre de voitures par minute qui circulent sur réseau est aussi indiqué. La circulation se fait à sens unique.



(a) **[3 points]** Écrivez le systéme linéaire décrivant le trafic sur ce réseau routier. [**Ne pas résoudre** ce système.]

(b) [**1 point**] Supposons que la matrice échelonnée réduite du système représentant ce réseau est:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donnez la solution générale de ce système.

(c) [**1 point**] Supposons que, dû a des travaux, le trafic sur la route ED est limité à un maximum de 200 voitures par minute. Quel est le nombre maximal de voitures qui peut circuler sur la route CE?

Pour plus de pratique

- **Question 1:**
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix}$. Trouvez les valeurs de $x,\ y$ et z pour que A soit sous forme échelonnée réduite. (ici il s'agit seulement de voir quelles valeurs de $x,\ y$ et z donnent une matrice sous forme échelonnée réduite).
Solution:
$x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
- **Question 2:**
Quelles parmis les matrices suivantes repésente la matrice augmentée d'un système linéaire avec une solution unique.
$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$
Solution: Seulement B.
- **Question 3:**
Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants:
$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ -h^2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ h \end{bmatrix}$. Trouvez les valeurs de h pour lesquelles le vecteur $\overrightarrow{b} \notin \mathcal{L}(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

Solution: $h = 3$.

- **Question 4:**
On considère le système linéaire suivant:
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & - & x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$
  (a) Donnez la matrice augmentée de ce système.
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$
  (b) En utilisant l'algorithme décrit en classe trouvez la matrice échelonnée réduite de la matrice augmentée de ce système. (Il faut préciser toutes les opérations que vous faites.)
La matrice échelonnée réduite est:
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Il faut faire les opérations suivantes:
$L_3 \to L_3 - L_1$; $L_3 \to L_3 - L_2$ pour la matrice échelonnée, puis $L_3 \to -L_3$; $L_2 \to L_2 - L3$; $L_1 \to L_1 + L_3$; $L_1 \to L_1 + L_2$ pour la matrice échelonnée réduite.

(c) Écrivez la solution générale trouvée dans la question précédente sous forme paramétrique.
Les variables de base sont, d'après 1, x_1, x_2 et x_3 et x_4 et x_5 sont libres. On pose $x_4 = s$ et $x_5 = t$. La solution sous-forme paramétrique est donc

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t \\ s+t \\ 1 \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

où $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

- **Question 5:**

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Donnez l'argument qui justifie la validité de l'opération $A\overrightarrow{b}$; c-à-d le produit de A avec $\overrightarrow{b}$.
C'est possible car le nombre de colonnes de A est égale à celui des lignes de $\overrightarrow{b}$.

(b) Calculez le produit $A\overrightarrow{b}$. (Donnez les détails du calcul).
$A\overrightarrow{b} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$

- **Question 6:**
On considère le système linéaire homogène suivant:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Résolvez ce systéme homogéne.
La matrice augmentée est (j'ignore la colonne des constantes car il n'y a que des zeros et rien de se passera au niveau de cette colonne)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \simeq \cdots \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les opérations sont: $L_3 \to L_3 - L_1;\ L_3 \to L_3 - L_2;\ L_1 \to L_1 - 2L_2$. Donc les variables de bases sont $x_1,\ x_2$ et x_3 est libre. La solution générale est

$$\begin{cases} x_1 &= 3x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \\ x_3 & \quad libre \end{cases}$$

(b) En déduire la forme paramétrique de la solution générale trouvée dans la question précédente.
Sous forme paramétrique la solution est donc: on pose $x_3 = s,\ s \in \mathbb{R}$

$$\left[\ \overrightarrow{x} = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\ \right] = \begin{bmatrix} 3s \\ -2s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$$

[N.B.: géométriquement, c'est une droite passant par l'origine et parallèle àu vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$].

- **Question 7:**

Soit l'ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant: $S = \{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4}\}$. Parmis les énoncés suivants lesquels sont corrects:

(a) S est linéairement **indépendant** si $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3} + 2\overrightarrow{u_4}$.
(b) Si $\overrightarrow{u_1} = 2\overrightarrow{u_2}$ alors S est linéairement **dépendant**.
(c) Si S est linéairement **indépendant** alors la matrice $[\overrightarrow{u_1}\ \overrightarrow{u_2}\ \overrightarrow{u_3}\ \overrightarrow{u_4}]$ est équivalente par rapport aux lignes à la matrice unité I_4.
(d) Si S est linéairement **dépendant** alors tout vecteur de S s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
(e) Si $\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}\}$ est linéairement **indépendant** alors S est aussi linéairement **indépendant**.
(f) Si $\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}\}$ est linéairement **indépendant** et si $\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{0}$ alors S est linéairement **indépendant**.

Solution: 2 et 3.

- **Question 8:**

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants:

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \overrightarrow{u_3} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs de a et b pour que $\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}\}$ est linéairement **dépendant**.

Solution: On considère la matrice $A = [\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3}]$. On a A est équivalente par rapport au lignes à $(L_3 \to L_3 + L_1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+b \end{bmatrix}.$$

Donc pour que ce système soit linéairement dépendant il faut que $a = -b$ (il faut avoir: # pivots $<$ # vecteurs).

- **Question 9:**

Trouvez les valeurs de h et k le système linéaire suivant est:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ hx_1 - 3x_2 + x_3 = k \end{cases}$$

(a) incompatible;
(b) compatible avec solution unique;
(c) compatible avec infinité de solutions.