Nom de famille (MAJUSCULES) ______________________________

Prénom (MAJUSCULES) ______________________________

Signature ______________________________

Numéro d'étudiant ______________________________

Mat 1739 Test 1

Professeur: D. Daigle Date: 9 octobre 2013 Durée: 75 minutes.

- Les manuels et notes de cours ne sont pas permis. **Les seules calculatrices permises sont celles qui ont seulement les fonctions "scientifiques" de base** (par exemple la TI-30). Il n'est pas permis d'utiliser une calculatrice programmable, ou une calculatrice qui permet de tracer le graphe d'une fonction, ou qui permet de calculer des dérivées ou des intégrales.
- Le test est constitué de cinq questions à choix multiple (valant 1 point chacune) et de trois questions à développer (valant de 4 à 7 points chacune).
- Pour les questions à choix multiple, seule la réponse compte (vous n'avez pas à expliquer ou justifier vos réponses).
- Pour les question à développer, vous devez donner des solutions complètes et justifier vos affirmations. Pour avoir tous les points, votre écriture doit être lisible et votre raisonnement doit être facilement compréhensible.
- Ne détachez pas les pages de l'examen. Vous pouvez utiliser le verso des pages pour le travail au brouillon ou pour répondre aux questions si vous manquez d'espace.

Espace réservé au correcteur.

Questions à choix multiple : Encerclez la lettre de la bonne réponse.

1. Le taux de variation moyen de $f(x) = x^2 + 5x - 8$ dans l'intervalle $1 \leq x \leq 3$ est :
(a) 5
$\boxed{\text{b}}$ 9
(c) 10
(d) 18

2. La limite $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ est :
(a) n'existe pas
(b) 10
(c) -5
$\boxed{\text{d}}$ 0

3. L'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = x^3 - x$ au point $(2, 6)$ est :
(a) $y = 6x - 6$
(b) $y = 2x + 2$
(c) $y = 12x - 18$
$\boxed{\text{d}}$ $y = 11x - 16$

4. Lequel des énoncés suivants est une règle de dérivation valide ?
(a) $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(x)g'(x)$
$\boxed{\text{b}}$ $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$
(c) $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g'(x))g'(x)$
(d) $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) + f(g'(x))$

5. Considérez la fonction : $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -2 \\ 2, & -2 \leq x < 1 \\ 1 - x^2, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$

Alors f est :
(a) discontinue en $x = -2$ et en $x = 1$, et est continue partout ailleurs ;
$\boxed{\text{b}}$ discontinue en $x = 1$ et en $x = 3$, et est continue partout ailleurs ;
(c) discontinue en $x = -2$ et en $x = 3$, et est continue partout ailleurs ;
(d) discontinue en $x = -2$, $x = 1$ et $x = 3$, et est continue partout ailleurs.

Questions à développer: Donnez des solutions complètes.
1. (4 points) Calculez les limites. Montrez les étapes de votre calcul.
(a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

Première solution :

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$$

Deuxième solution :

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x})^2-3^2} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$$

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+5x+3}{x^2-1}$

Première solution :

$$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+5x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2(3+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to \infty} \frac{3+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

Deuxième solution (on utilise le théorème vu en classe) :

$$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+5x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to \infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x\to \infty} 3 = 3$$

2. (4 points) Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes ; ne simplifiez PAS vos réponses.

(a) $g(t) = \dfrac{3t-2}{5t+1}$

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3t-2}{5t+1}\right) = \frac{\left[\frac{d}{dt}(3t-2)\right](5t+1) - (3t-2)\left[\frac{d}{dt}(5t+1)\right]}{(5t+1)^2}$$

$$= \frac{3(5t+1)-(3t-2)5}{(5t+1)^2}$$

On peut répondre $\boxed{g'(t) = \dfrac{3(5t+1)-(3t-2)5}{(5t+1)^2}}$ ou $\boxed{g'(t) = \dfrac{13}{(5t+1)^2}}$.

(b) $h(x) = (5x+1)^{1/3}\,(4x+3)^{1/5}$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{d}{dx}\left[(5x+1)^{1/3}(4x+3)^{1/5}\right] \\
&= \left[\tfrac{d}{dx}\left((5x+1)^{1/3}\right)\right](4x+3)^{1/5} + (5x+1)^{1/3}\left[\tfrac{d}{dx}\left((4x+3)^{1/5}\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{3}(5x+1)^{-2/3}\left[\tfrac{d}{dx}(5x+1)\right](4x+3)^{1/5} + (5x+1)^{1/3}\tfrac{1}{5}(4x+3)^{-4/5}\left[\tfrac{d}{dx}(4x+3)\right] \\
&= \tfrac{1}{3}(5x+1)^{-2/3}5(4x+3)^{1/5} + (5x+1)^{1/3}\tfrac{1}{5}(4x+3)^{-4/5}4 \\
&= \tfrac{5}{3}(5x+1)^{-2/3}(4x+3)^{1/5} + \tfrac{4}{5}(5x+1)^{1/3}(4x+3)^{-4/5}
\end{aligned}$$

Les deux dernières lignes sont des bonnes réponses.

Remarque : Dans les questions (a) et (b) ci-dessus, il n'est pas obligatoire de donner toutes les étapes des calculs, mais il faut donner quelques étapes. Il faut que la personne qui corrige soit capable de suivre votre raisonnement.

3. (7 points) Soit $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$.
(a) Trouvez les points critiques (aussi appelés nombres critiques) de $f(x)$.

$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5) = 3(x+5)(x-1)$
$f'(x) = 0 \iff x = -5$ ou $x = 1$, donc les nombres critiques sont -5 et 1.

(b) Trouvez les intervalles sur lesquels $f(x)$ est croissante/décroissante.

	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 1)$	1	$(1, \infty)$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Donc f est croissante sur $(-\infty, -5)$, décroissante sur $(-5, 1)$, croissante sur $(1, \infty)$.

(c) Trouvez les maximum locaux et les minimum locaux de $f(x)$.

Le tableau de la partie (b) montre qu'il y a un maximum local en $x = -5$ et un minimum local en $x = 1$.
Comme $f(-5) = 101$ et $f(1) = -7$, on conclut que le maximum local est le point $(-5, 101)$ du graphe de f, et le minimum local est le point $(1, -7)$.

(d) Trouvez les intervalles où le graphe de $f(x)$ est concave vers le haut/vers le bas.

$f''(x) = 6x + 12 = 6(x+2)$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	inflex.	$\smile$

Donc le graphe de f est concave vers le bas sur l'intervalle $(-\infty, -2)$ et concave vers le haut sur l'intervalle $(-2, \infty)$.

(e) Trouvez les points d'inflexion du graphe de $f(x)$.

Le travail fait en (d) montre qu'il y a exactement un point d'inflexion, en $x = -2$.
Comme $f(-2) = 47$, le point d'inflexion est $(-2, 47)$.

Cette fois-ci seulement, j'accepte comme réponse de (c) "f a un maximum local en $x = -5$ et un minimum local en $x = 1$", et comme réponse de (e) "f a un point d'inflexion en $x = -2$". À l'avenir, il faudra donner les deux coordonnées de chacun de ces points (x, y).

Barème pour cette question :
(a), (c), (e) valent 1 point chacune ; (b), (d) valent 2 points chacune.