Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistiques

MAT 1702C : Méthodes Mathématiques II

Professeur: Abdelkrim El basraoui

Examen Partiel II – Version A - Solution

21 Novembre 2013

Nom ____________________ Prénom ____________________

d'étudiant ____________________

Instructions:

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant en haut de chaque page détachée dans l'espace précisé, s'il y a lieu.
- La durée de cet examen est de 80 minutes.
- Cet examen est un examen à livre fermé qui comporte **6 questions**.
- Utilisez l'espace spécifié pour répondre à chacune des questions. Si jamais l'espace ne vous suffit pas ou que vous utilisez l'endos de la page veuillez indiquer clairement où se trouve votre réponse ainsi que la suite du développement, s'il y a lieu.
- Vous devez justifier vos réponses.
- Les calculatrices ne sont pas permises.
- Vous avez une page supplémentaire à la fin que vous pouvez utiliser comme feuille de brouillon.

Bonne chance!

Ne rien inscrire dans la table suivante.

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Maximum	3	3	4	5	5	3	23
Note							

1. [**3 points**] Trouvez l'inverse de la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solution: On doit échelonner

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{5}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Donc $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$

2. [**3 points**] Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Trouvez la matrice X qui satisfait

$$A(X^T + C) = BC$$

Solution:

$$\begin{aligned} A(X^T + C) = BC \;&\Rightarrow\; A^{-1}A(X^T + C) = A^{-1}BC \;\Rightarrow\; X^T + C = A^{-1}BC \\ &\Rightarrow\; X^T = A^{-1}BC - C \;\Rightarrow\; X = C^T B^T (A^{-1})^T - C^T \end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

et donc

$$C^T B^T (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ -4 & -2 \\ 19 & 9 \end{bmatrix}$$

et d'où

$$X = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ -4 & -2 \\ 19 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ -3 & -2 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Soit la matrice suivante $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) [**3 points**] Trouvez une base pour $\operatorname{Nul} A$. **Solution:** On trouve premierement la matrice échelonnée réduite de A. On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc dans la solution générale du systeme homogene associe les variables x_1 et x_3 sont les variables de base et x_2, x_4, x_5 sont libres et on a

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_4 - x_5 \\ x_3 = \frac{1}{2} x_4 - \frac{1}{2} x_5 \end{cases}$$

avec forme vectorielle

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc une base de $\operatorname{Nul} A$ est

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) [**1 point**] Quel est le rang, $\operatorname{rg}(A)$, de A? Justifiez votre réponse.

Solution: D'apres le Theoreme du rang on a

$$\operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Nul} A = 5 \ \Rightarrow \ \operatorname{rg} A = 5 - 3 = 2.$$

4. Une économie avec deux secteurs, Agriculture et Constructions, suit le modèle suivant:

- pour chaque unité de sortie, l'agriculture requiert $\dfrac{1}{3}$ unité du même secteur et $\dfrac{1}{2}$ unité des constructions;
- pour chaque unité de sortie, les constructions ont besoin de $\dfrac{1}{6}$ unité de l'autre secteur et $\dfrac{3}{4}$ unité du même secteur.

(a) [**1 point**] Déterminez la matrice de consommation C pour cette économie.

(b) [**2 points**] Calculer $I_2 - C$ et son inverse $(I_2 - C)^{-1}$.

(c) [**1 point**] Déterminez la demande intermédiaire si l'Agriculture décide de produire 12 unités et les Constructions décide de produire 24 unités.

(d) [**1 point**] Trouver le niveau de production, en utilisant l'inverse dans (b), pour satisfaire une demande finale de 5 unités de l'agriculture et 10 unités des Constructions.

Solution: (a) on a

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

(b)

$$I_2 - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

$$(I_2 - C)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{12} - \frac{1}{12}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = 12 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$12 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 24 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$$

(d) soient x_1 et x_2 les niveaux de production requis respectivement de l'Agriculture et des Constructions et soit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Notez que $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I_2} - \mathbf{C})^{-\mathbf{1}}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 110 \end{bmatrix}.$$

5. *Les questions suivantes sont indépendantes.*

(a) [**3 points**] Soit la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calculez $\det A$ **en développant selon la ligne ou la colonne** de votre choix.

Solution: On developpant selon la 3eme colonne on obtient

$$\det A = 0\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Maintenant, on a

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4)(-1) + (5)(1) = 9 \text{ (selon la 3eme ligne)}$$

et

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-7) + (1)(1) + (2)(-5) = -2. \text{ (selon la 1ere li}$$

D'ou $\det A = (-9) + (-2) = -11$.

(b) [**2 points**] Soient P, Q et R des matrices d'ordre 3 telles que $\det(P) = -\frac{1}{2}$, $\det(Q) = 5$, and $\det(R) = -10$. Calculez $\det(-\frac{1}{2}P^TQ^2R^{-1}P^{-2})$.

Solution:

$$\det(-\frac{1}{2}P^TQ^2R^{-1}P^{-2}) = (-\frac{1}{2})^3(-\frac{1}{2})(5^2)(-\frac{1}{10})(-2)^2 = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}.$$

6. Déterminez si les ensembles suivants sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ ou non. Justifiez votre réponse.
(a) **[1 point]**

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a^2+b^2 \\ b+c \\ 2c \end{bmatrix} \middle| \, a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Solution: en notant que U is $a^2+b^2 \geq 0$ on peut verifier que U n'est pas ferme pour la multiplication pas scalaire et donc n'est pas un sous-espace. En effet, on a

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U \text{ prendre } a = 1, b = c = 0$$

mais

$$(-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin U.$$

(b) **[1 point]** $V = \left\{ \begin{bmatrix} a-2b \\ -b+c \\ -2c \end{bmatrix} \middle| \, a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$

Solution: V est un sous-espace car tout vecteur de V s'ecrit comme combinaison lineaire des vecteurs suivants:

$$\begin{bmatrix} a-2b \\ -b+c \\ -2c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

et donc

$$V = \mathcal{L} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) [**1 point**]

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 5 & 10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Solution: Notez que $W = \operatorname{Nul} A$, ou A la matrice d'ordre 3 dans W. D'ou A est un sous-espace.