MAT 1730 – Automne 2011 – Devoir 3
À remettre en classe le mercredi, 12 octobre.

DGD (encercler un seul): 1 2 3

Nom: Solutions No d'étudiant: ―

QUESTION 1.

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} asin(x) + b & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + a & \text{si } 0 < x \le 1 \\ bcos(2\pi x) + a & \text{si } x > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Quelle valeur doit-on donner à a et à b pour que la fonction soit continue partout?

Réponse: $a = 1$ et $b = 1$

Justifier votre réponse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = a\sin(0)+b = b \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^2 + a = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \text{ ssi } \boxed{b=a} \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 + a = 1+a \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = b\cos(2\pi) + a = a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \text{ ssi } 1+a = a+b \text{ ssi } \boxed{b=1} \quad (**)$$

donc $\boxed{a=b=1}$ en combinant $(*)$ et $(**)$.

Question 2.

Montrer à l'aide de la définition de la dérivée que pour $x > 0$ quelconque, on a:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{3x} = \frac{3}{2\sqrt{3x}}.$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{3x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}}{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h\left(\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h\left(\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3}{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

Question 3.

Soit la fonction $f(x) = \frac{(3x^2+5)}{(x+1)}$.

a) Déterminer le domaine de f. Réponse: $\boxed{\text{Tous lès réels sauf } x=-1}$

b) Calculer $f'(x)$.

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2+5)'(x+1) - (3x^2+5)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{6x(x+1) - (3x^2+5)\cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{6x^2+6x-3x^2-5}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3x^2+6x-5}{(x+1)^2} \end{aligned}}$$

c) Déterminer les points critiques de f.

Les points critiques sont $\boxed{-1-\frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ et } -1+\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

Justifier votre réponse:

Les seuls points critiques de f sont sol^{n} de $f'(x)=0$:

$$0 = f'(x) = \frac{3x^2+6x-5}{(x+1)^2} \quad \text{ssi} \quad 3x^2+6x-5=0$$

On cherche les racines de cette équation quadratique:

$$x_{\pm} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+60}}{6} = -1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

QUESTION 4.

Trouver l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6$ au point $(2, f(2))$.

L'équation de la tangente est $\boxed{y = -22}$

Justifier votre réponse:

Eqn. de la tangente $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

- $f(2) = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 - 6 = -22$
- $f'(x) = (3x^4 - 8x^3 - 6)' = 3(x^4)' - 8(x^3)' - 6'$
  $= 3 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 3x^2 - 0 = 12x^3 - 24x^2$

$\Rightarrow f'(2) = 12 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2^2 = 0$

donc la tangente est pour $a = 2$

$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = -22 + 0 \cdot (x - 2)$

i.e. $y = -22$ droite horizontale