MAT 1730 – Automne 2011 – Devoir 6
À remettre en classe le mercredi, 24 Novembre.

Nom: Solutionnaire No d'étudiant:

QUESTION 1. Soit $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ une fonction d'une variable réelle x. Montrer qu'il existe deux solutions distinctes de l'équation $f'(x) = 0$. Réponse:

Méthode 1

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6 = 0$

$\Delta = 100 - 6(3)(4) = 28$

donc il y a deux solutions $x_1 = \frac{10+\sqrt{28}}{6}$ et $x_2 = \frac{10-\sqrt{28}}{6}$

Méthode 2

$f(x) = x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3)$

donc $f(0) = f(2) = f(3) = 0$

donc d'après le théorème de Rolle ; il existe $c_1 \in]0,2[$ tel que $f'(c_1) = 0$

et il existe $c_2 \in]2,3[$ tel que $f'(c_2) = 0$

QUESTION 2.

a) Développer $f(x) = e^x$ en série de Taylor d'ordre n au voisinage de $x = 1$.

Le développement de Taylor de e^x d'ordre n au voisinage de a est

$$P_n(x) = e^a + \frac{(x-a)}{1!} e^a + \frac{(x-a)^2}{2!} e^a + \frac{(x-a)^3}{3!} e^a + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} e^a.$$

En particulier si $a=1$; on a

$$P_n(x) = e^1 + \frac{(x-1)}{1!} e^1 + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} e^a.$$

pour x voisin de a.

$$f(x) = e^x \simeq P_n(x).$$

b) Approximer $\sqrt{e^3}$ en utilisant le polynôme de Taylor d'ordre 3 obtenu à la question (a).

si $n=3$; on a.

$$P_3(x) = e^1 + \frac{(x-1)}{1!} e^1 + \frac{(x-1)^2}{2!} e^1 + \frac{(x-1)^3}{3!} e^1$$

si x est voisin de 1 ; en particulier $x = \frac{3}{2}$; on a

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right) = e^{3/2} = \sqrt{e^3} \simeq e^1 + \left(\tfrac{3}{2}-1\right)e^1 + \frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}{2!} e^1 + \frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^3}{3!} e^1$$

$$= 4,473839$$

la valeur exacte est $e^{3/2} = 4,481689$

QUESTION 3. Veuillez suivre les étapes ci-dessous pour tracer le graphe de la fonction suivante:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2-3x+1}{2}}.$$

a) Donner le domaine de définition de $f(x)$:

Réponse: $\boxed{\mathbb{R}}$

b) Donner les asymptotes verticales:

Il n'ya pas d'asymptote verticale

c) Trouver les asymptotes horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} = 0$$

Réponse: $y = \boxed{0}$ est une asymptote horizontales.

d) Trouver les zéros de la fonction et l'ordonnée à l'origine:

Réponse: $Z_f = \boxed{\text{pas de zero}}$. Réponse: $O_f = \boxed{f(0)} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

e) Calculer $f'(x)$, trouver les points critiques, donner le tableau de variation de $f'(x)$ et indiquer si $f(x)$ est croissante ou décroissante:

Donner sous forme simplifiée $f'(x) = \boxed{-\frac{1}{2}(2x-3)\, e^{-\frac{x^2-3x+1}{2}}}$.

Point(s) critique(s) $x = \boxed{3/2}$.

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1,868$	$\searrow$	0

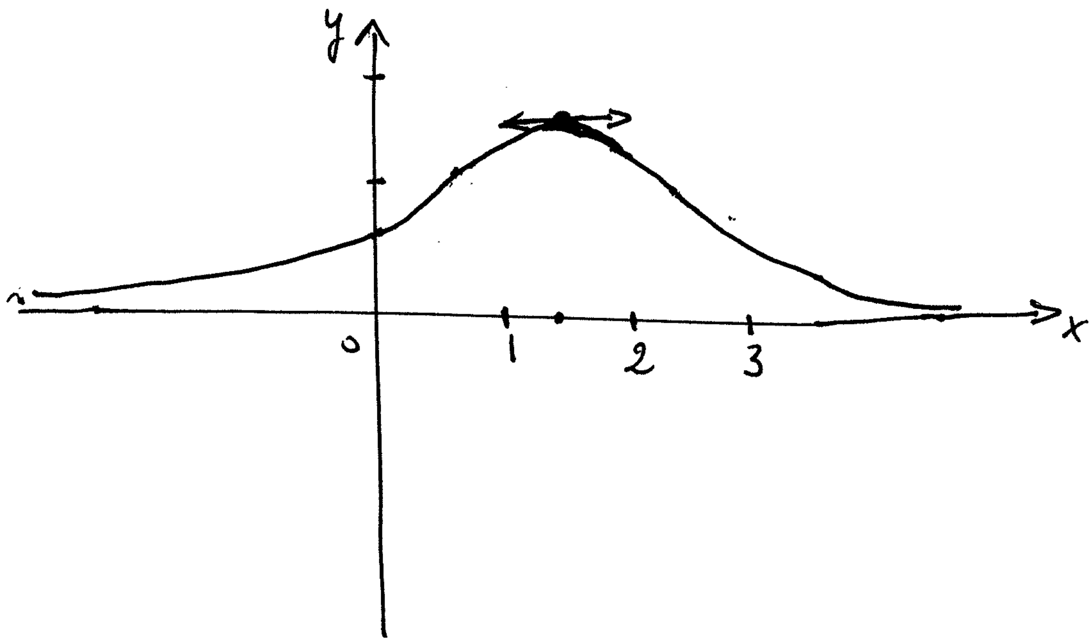
f) Calculer $f''(x)$, donner le tableau de variation de $f''(x)$ et indiquer si $f(x)$ est concave ou convexe, puis donner les points d'inflexion de f.

Donner sous forme simplifiée $f''(x) = \boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right) e^{-\frac{x^2-3x+1}{2}}}$.

x	$-\infty$		$0,5$		$2,5$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Donner les points d'inflexion. Réponse: $x_1 = \boxed{0,5}$ et $x_2 = \boxed{2,5}$.

g) Tracer le graphe de la fonction $f(x)$.



QUESTION 4. Déterminer les limites suivantes:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\tan(x)}$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\tan x} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée).}$$

$$\overset{R.H}{\Longrightarrow} L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x + x\sec^2 x} = \frac{0}{0} \overset{R.H}{\Longrightarrow}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sec^2 x + \sec^2 x + 2x\sec x\tan x} = \frac{1}{2}$$

(b) $\lim_{t\to 0} \frac{7^t - 6^t}{t}$

$$L = \lim_{t\to 0} \frac{7^t - 6^t}{t} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée).}$$

$$\overset{R.H}{\Longrightarrow} L = \lim_{t\to 0} \frac{7^t \ln 7 - 6^t \ln 6}{1} = \ln 7 - \ln 6 = \ln(7/6)$$

$$= 0,15415$$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos(2\pi x)}$

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos(2\pi x)} = \frac{0}{2} = 0$$