

Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 B)

TEST DIAGNOSTIQUE (19 Janvier 2013)

Professeur: Joseph Khoury.

Durée: 80 minutes

Nom de famille: Solubion

Prénom: _____

Numéro d'étudiant: _____

Aucune note n'est permise.

Les calculatrices ne sont pas permises.

Ce test diagnostique comporte 12 questions et 9 pages. Toutes les questions sont à choix multiples et valent chacune 1 point sur les 12 points que compte le test. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Vous pouvez utiliser le verso des pages et la feuille additionnelle à la fin pour vos calculs. Un tableau des fonctions trigonométriques de base se trouve à la dernière page de ce test. Bonne chance.

1. L'équation du plan passant par les trois points

$$A(-1, 0, 1), B(0, 1, 2), C(1, -1, 1)$$

est:

A. $x + 2y - 3z = -4$

B. $-x + y + z = -1$

C. $2x + 3y - z = 4$

D. $x - 3y + z = 1$

E. $x - 2y + z = 2$

F. Aucune des autres réponses

Solution $\vec{AB} = (1, 1, 1)$ et $\vec{AC} = (2, -1, 0)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 2, -3) \quad : \text{C'est un vecteur normal au plan.}$$

l'équation du plan est de la forme $x + 2y - 3z = d$. En utilisant les coordonnées du point $A(-1, 0, 1)$: $-1 + 2(0) - 3(1) = d \Rightarrow d = -4$.

$$x + 2y - 3z = -4$$

2. Considérer les deux vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (2, 1, 3)$ de \mathbb{R}^3 . Trouver le vecteur $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ (la projection orthogonale du vecteur \vec{u} sur le vecteur \vec{v}).

A. $2\sqrt{3}(1, 1, 1)$

B. $(1, 1, 1)$

C. $\frac{3}{7}(2, 1, 3)$

D. $\frac{3}{7}(3, 3, 3)$

E. $\frac{3\sqrt{14}}{7}(2, 1, 3)$

F. $\frac{4}{7}(2, 1, 3)$

Solution $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v} = \frac{(1, 1, 1) \cdot (2, 1, 3)}{(2, 1, 3) \cdot (2, 1, 3)} (2, 1, 3) = \frac{6}{14} (2, 1, 3)$

$$\Rightarrow \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{3}{7} (2, 1, 3)$$

3. Considérer les deux droites suivantes données par leurs équations paramétriques:

$$L_1: x = -2s + 1, y = s + 2, z = 4s + 1, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$L_2: x = t + 3, y = t + 1, z = t - 3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parmi les énoncés suivants un seul est vrai, lequel?

- A. L_1 et L_2 sont parallèles
- B. L_1 et L_2 sont perpendiculaires
- C. L_1 et L_2 se coupent au point $(3, 1, -3)$
- D. L_1 et L_2 se coupent au point $(3, -1, -3)$
- E. L_1 et L_2 se coupent au point $(-3, 1, -3)$
- F. L_1 et L_2 ne sont pas coplanaires

Solution

$$\begin{cases} -2s + 1 = t + 3 & \textcircled{1} \\ s + 2 = t + 1 & \textcircled{2} \\ 4s + 1 = t - 3 & \textcircled{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s + t = -2 & \textcircled{1} \\ s - t = -1 & \textcircled{2} \\ 4s - t = -4 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 3s = -3 \Rightarrow s = -1. \text{ Soit } \textcircled{2} \Rightarrow t = s + 1 = 0.$$

Pour $s = -1, t = 0$, on a $4s - t = -4$: $\textcircled{3}$ est satisfait. Les deux droites sont concourantes. Pour $t = 0$: $x = 3, y = 1, z = -3$

Le point d'intersection est $(3, 1, -3)$

4. Considérer les trois vecteurs $\vec{u} = (1, m, -2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ et $\vec{w} = (-1, 0, -m)$ où $m \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de m , les vecteurs $\vec{u} \times \vec{v}$ et \vec{w} sont-ils perpendiculaires?

- A. $m = 3$ seulement
- B. $m = -1, m = 2$
- C. $m = 3, m = -4$
- D. $m = 1, m = -2$
- E. $m = -1$ seulement
- F. $m = -3, m = 4$

Solution

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & m & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, 1-m)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \text{ et perpendiculaire à } \vec{w} \Leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow$$

$$2(-1) + 2(0) + (-m)(1-m) = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow m = -1, m = 2$$

5. Le point du plan $x - y + z = 2$ le plus proche du point $A(1, 1, -1)$ est:

- A. $(2, 1, 1)$ B. $(-2, 1, 5)$ C. $(0, -2, 0)$
 D. $(2, 0, 0)$ E. $(2, -1, -1)$ F. $(0, 0, 2)$

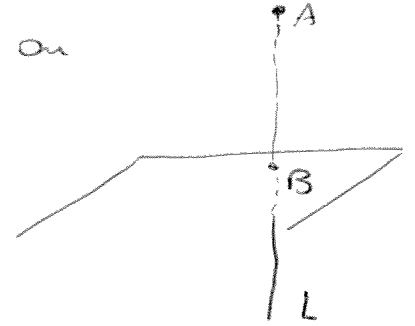
Solution Soit L la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire au plan. Alors L est parallèle au vecteur normal $\vec{n}(1, -1, 1)$ du plan et les équations paramétriques de L sont

$$x = t + 1, y = -t + 1, z = t - 1 \quad ; t \in \mathbb{R}.$$

on cherche le point d'intersection de L avec le plan:

$$t + 1 - (-t + 1) + (t - 1) = 2 \Leftrightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1. \text{ D'où } x = 2, y = 0, z = 0$$

Le point du plan le plus proche de A est donc $(2, 0, 0)$



6. L'aire du triangle formé par les points $A(2, 1, 0)$, $B(0, -1, 2)$ et $C(1, -2, 2)$ est:

- A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$ B. $4\sqrt{6}$ C. $\frac{2}{\sqrt{6}}$ D. $2\sqrt{6}$ E. $\sqrt{6}$ F. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Solution $\vec{AB} = (-2, -2, 2)$, $\vec{AC} = (-1, -3, 2)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, 4)$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Aire du triangle} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}.$$

7. La partie réelle du nombre complexe

$$z = \frac{1-5i}{1-i}$$

est:

- A. -2 B. 3 C. 2 D. -1 E. 1 F. -3

Solution $\frac{(1-5i)}{1-i} = \frac{(1-5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i-5i+5}{2} = \frac{6-4i}{2}$
 $= 3-2i$

Alors la partie réelle de $\frac{1-5i}{1-i}$ est 3

8. Soit L la droite donnée par les équations paramétriques:

$$x = -1 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'équation du plan qui passe par les deux points $A(-1, 0, 2)$, $B(1, 1, 1)$ et qui est parallèle à la droite L est:

- A. $-x + 2y + 4z = 7$ B. $x + 2y + 4z = 7$ C. $x - 2y + 4z = 5$
 D. $x + 2y + 4z = -7$ E. $x + 2y - 4z = -9$ F. $x - 2y - 4z = -5$

Solution Le plan est parallèle à L et qui passe par A et B
 est parallèle au vecteur directeur $\vec{d} = (2, -1, 0)$ de

L et au vecteur $\vec{AB} = (2, 1, -1)$

$$\vec{d} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, 4) \text{ : vecteur normal du plan}$$

$x + 2y + 4z = d$. Comme A est dans le plan: $-1 + 2(0) + 4(2) = d$

$\Rightarrow d = 7$. Alors l'équation du plan est $x + 2y + 4z = 7$.



9. La droite L est parallèle en même temps aux deux plans $y - z = 2$ et $x + z = 3$ et elle passe par le point $A(1, -3, -2)$. Les équations paramétriques de L sont:

- A. $x = t + 1, y = t - 3, z = t - 2; t \in \mathbb{R}$
- B. $x = t + 1, y = t - 3, z = -t - 2; t \in \mathbb{R}$
- C. $x = 1, y = -t - 3, z = -t - 2; t \in \mathbb{R}$
- D. Aucune des autres réponses
- E. $x = -t + 1, y = -3, z = -t - 2; t \in \mathbb{R}$
- F. $x = -t + 1, y = t - 3, z = -t - 2; t \in \mathbb{R}$

Solution L est perpendiculaire aux vecteurs normaux $\vec{n}_1(0, 1, -1)$ et $\vec{n}_2(1, 0, 1)$ des plans. Alors L est parallèle à $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1)$$

Les équations paramétriques de L sont alors
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 3 \\ z = -t - 2 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

10. L'équation $5x - y + 6z = -3$ est celle...

- (1) d'un plan passant par le point $(0, 3, 1)$ avec $(5, -1, 6)$ comme vecteur normal
- (2) d'un plan passant par le point $(9, 0, -8)$ avec $(5, -1, 6)$ comme vecteur normal
- (3) d'un plan passant par le point $(5, -1, 6)$ avec $(0, 3, 0)$ comme vecteur normal
- (4) d'un plan passant par les points $(9, 0, -8)$, $(1, 1, 1)$ et $(0, 3, 0)$
- (5) d'une droite dans \mathbb{R}^3 avec $(5, -1, 6)$ comme vecteur directeur
- (6) d'une droite dans \mathbb{R}^3 passant par les points $(9, 0, -8)$ et $(0, 3, 0)$

- A. (5) B. (6) C. (2) D. (3) E. (1) F. (4)

Solution C'est un plan avec $(5, -1, 6)$ comme vecteur normal.

Le point $(9, 0, -8)$ appartient au plan

11. La forme polaire du nombre complexe:

$$\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}$$

est:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ C. $\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$
 D. $\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ E. $\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ F. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

Solution $|1+i| = \sqrt{2} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$

$$|1-\sqrt{3}i| = 2 \Rightarrow 1-\sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left[\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3) \right] \\ = 2 e^{-i\pi/3}$$

Alors $\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2} e^{i\pi/4}}{2 e^{-i\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i[\pi/4 - (-\pi/3)]} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$

12. Le volume du parallépipède formé par les trois vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ et $\vec{w} = (1, 0, -3)$ est

- A. 4 B. 0
 C. 2 D. 3
 E. 1 F. Aucune des autres réponses

Solution $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$

Le volume du parallépipède est donc $|-1| = 1$.