Problème 1 *Trouvez et classifiez les points critiques de la fonction* $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy$.

Sol.

$$f_x = 3x^2 - 2y = 0, \qquad f_y = 2y - 2x = 2(y-x) = 0.$$

Donc, $f_y = 0$ ssi $y - x = 0$, $x = y$. On remplace dans $f_x = 0$ et on obtient

$$0 = 3x^2 - 2x = x(3x-2), \quad x = 0, \ \ x = 2/3.$$

Donc les P.C. sont

$$(0,0), \quad (2/3, 2/3).$$

On a:

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -2, \quad f_{yy} = 2,$$

et

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 12x - 4.$$

On a

$$D(0,0) < 0, \quad donc \ \ (0,0) \ \ estP.S.,$$

$$D(2/3,2/3) > 0, \quad f_{xx}(2/3,2/3) > 0, \quad donc \ \ (2/3,2/3) \ \ est\ min.loc.$$

Problème 2 *Utilisez la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver le maximum et le minimum absolu de la fonction* $f(x, y) = (x + y)^2$ *sous la contrainte* $x^2 + y^2 = 2$.

Sol. Ici $f(x, y) = (x + y)^2$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$. A resoudre

$$\begin{cases} \nabla f &= \lambda \nabla g, \\ g &= 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_x &= \lambda g_x, \\ f_y &= \lambda g_y, \\ g &= 0, \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} 2(x+y) &= 2\lambda x, \\ 2(x+y) &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y) &= \lambda x, \\ (x+y) &= \lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 2. \end{cases}$$

Il en suit

$$\lambda x = \lambda y, \quad \lambda(x - y).$$

Alors $y = x$ ou $\lambda = 0$.

Si $y = x$, en remplacant dans $g = 0$ on obtient

$$2x^2 = 2, \quad x = \pm 1.$$

D'ou $(-1, -1)$, $(1, 1)$ sont solutions.

Si $\lambda = 0$ alors $x + y = 0$, donc $y = -x$ et en remplacant dans $g = 0$ on obtient

$$2x^2 = 2, \quad x = \pm 1.$$

D'ou $(-1, 1)$, $(1, -1)$ sont solutions.

Donc, on a quatre solutions

$$(-1, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, -1), \quad (1, 1).$$

Il en suit que:

$$f(1, 1) = f(-1, -1) = 4 \quad \textit{est maximum},$$
$$f(-1, 1) = f(1, -1) = 0 \quad \textit{est minimum}.$$

Problème 3 *Évaluez l'integrale suivant*

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{2}{1+x^3} dxdy.$$

Sol. L'integrale étant difficile, on change l'ordre de l'integration.

On note que

$$I = \iint_D \frac{2}{1+x^3} dA, \quad D = \{(x, y),\ y \in [0, 4], x \in [\sqrt{y}, 2]\}.$$

On peut ecrire

$$D = \{(x, y),\ x \in [0, 2], y \in [0, x^2]\}.$$

Alorshhh

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{2}{1+x^3} dydx \\ &= \int_0^2 \frac{2x^2}{1+x^3} dx \\ &= \frac{2}{3} \big[\ln(1+x^3)\big]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \ln(9). \end{aligned}$$

Problème 4 *Trouvez la masse de la plaque à densité* $\rho(x,y) = xy$ *et délimitée par les graphes des fonctions* $y = x^2$ *et* $y = 2x$.

Sol. On a

$$m(D) = \iint_D \rho(x,y)dA = \int_D xydA.$$

On note que l'intersection des deux courbes est donnés par (x,y), avec x satisfaisant

$$x^2 = 2x, \quad donc \;\; x = 0 \; ou \; x = 2.$$

Donc, $(0,0)$, $(2,4)$ sont les intersections. Alors

$$D = \{(x,y), \;\; x \in [0,2], \;\; y \in [x^2, 2x]\},$$

et

$$\begin{aligned} m(D) &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xydydx \\ &= \int_0^2 x\Big[\frac{1}{2}y^2\Big]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}(4x^3 - x^5)dx \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Problème 5 *Trouvez le volume du solide (tétrahédron) delimité par les plan des coordonnées et le plan $2x + 2y + z = 4$.*

Sol. L'intersection du plan $2x + 2y + z = 4$ avec le plan xy est la droite $2x + 2y = 4$, donc $y = 2 - x$. Alors, le solide E est donné comme

$$E = \{(x, y, z),\ (x, y) \in D,\ z \in [0, 4 - 2x - 2y]\}, \quad D = \{(x, y),\ x \in [0, 2],\ y \in [0, 2 - x]\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
V(E) &= \iiint_E dV \\
&= \iint_D \int_0^{4-2x-2y} dz dA \\
&= \iint_D (4 - 2x - 2y) dA \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} (4 - 2x - 2y) dy dx \\
&= \int_0^2 (2(2 - x)^2 - (2 - x)^2) dx = \int_0^2 (2 - x)^2 dx \\
&= \big[-\frac{1}{3}(2 - x)^3 \big]_0^2 \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$