MAT 1730, Automne 2013 Devoir 2

Prof : Rachelle Miron

À remettre le 2 octobre **avant** 19h00.

Les devoirs en retard ou non agrafés ne seront pas acceptés.

SVP ne pas déranger les professeurs du départment pour une brocheuse!

Nom, Prénom ______________________________ Numéro d'étudiant ______________________________

Mon DGD (Encercler): DGD 1 (FSS1030) DGD 2 (FTX232) DGD 3 (MNT207)

En signant ci-dessous, vous déclarez que le travail remis est original et a été écrit par vous et que vous n'avez pas copié sur quiconque ou de tout autre source.

Signature ______________________________

QUESTION 1. Déterminer $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x} \right)$. Réponse: $\boxed{1}$

Donner deux séries qui commence (une à la droite de zéro et une à la gauche). Quatre termes suffisent pour chaque série.

x_n	$f(x_n)$	x_n	$f(x_n)$
0.1	1.05170918	-0.1	0.95162582
0.01	1.0050167	-0.01	0.99501663
0.001	1.000500	-0.001	0.99950020
0.0001	1.000050	-0.0001	0.9999500

Alors, lorsque $x \to 0$, la limite s'approche 1 des deux côtés.

QUESTION 2. Calculez les limites suivantes, si elles existent, ou dites pourquoi la limite n'existe pas. Justifier votre réponse sans utiliser un tableau ou une série de numéro.

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1-x}{1+x} \right)$. Answer: $\boxed{\text{N'existe pas}}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{0^-}(1) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{0^+}(1) = \infty.$$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x^2-3x+2}$. Réponse: $\boxed{2}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 1} -\frac{(1+x)}{x-2} = 2.$$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$. Réponse: $\boxed{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(0)}{\cos^2(0)} = 0.$$

QUESTION 3. Est-ce que la limite $\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+5t}} - \frac{1}{t} \right)$ existe? Réponse: $\boxed{\text{Oui}}$

Si oui, la limite égale quoi? Réponse: $\boxed{-5/2}$

Justifier votre réponse sans utiliser un tableau ou une série de numéro.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+5t}} - \frac{1}{t} \right) &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\sqrt{1+5t}}{t\sqrt{1+5t}} \times \frac{1+\sqrt{1+5t}}{1+\sqrt{1+5t}} = \lim_{t\to 0} \frac{1-(1+5t)}{t\sqrt{1+5t}(1+\sqrt{1+5t})} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{-5t}{t\sqrt{1+5t}(1+\sqrt{1+5t})} = \lim_{t\to 0} \frac{-5}{\sqrt{1+5t}(1+\sqrt{1+5t})} = -5/2. \end{aligned}$$

QUESTION 4. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^2-9}{|x-3|}$.

a) Calculez $\lim_{x\to 3^+} g(x)$. Réponse: $\boxed{6}$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} (x+3) = 6.$$

b) Calculez $\lim_{x\to 3^-} g(x)$. Réponse: $\boxed{-6}$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{-(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} -(x+3) = -6.$$

c) Est-ce que la limite $\lim_{x\to 3} g(x)$ existe? Réponse: $\boxed{\text{Non}}$

Justifier votre réponse:

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) \neq \lim_{x\to 3^-} g(x).$$

Alors la limite à $x = 3$ n'existe pas.

QUESTION 5. Pour quelles valeurs de a et b la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} a\sin(x) + b, & x \leq 0 \\ x^2 + a, & 0 < x \leq 1 \\ b\cos(2\pi x) + a, & x > 1 \end{cases}$$

est-elle continue pour toutes valeurs de x?

Réponse: $\boxed{a = b = 1}$

La fonction $f(x)$ est continue pour toutes valeurs de x si

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1).$$

Alors on a que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + a) = a$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a\sin(x) + b) = b$$
$$f(0) = a\sin(0) + b = b.$$

Donc il faut que $a = b$. On a aussi que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (b\cos(2\pi x) + a) = b + a$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 + a) = a + 1$$
$$f(1) = 1^2 + a = a + 1.$$

Donc il faut que $b + a = a + 1$. Alors $b = 1$. Puisque $a = b$, il faut que $a = 1$ aussi. Donc la fonction $f(x)$ est continue pour toutes valeurs de x si $a = b = 1$.