$Q1$

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & t+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & t+1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-2R1 + R2 \rightarrow R2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & t+1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{R3}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & t+1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

$$2R2 + R3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & t+\frac{3}{7} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$t + \frac{7}{3} \neq 0$$

$$t \neq -\frac{7}{3}$$

Justify the answer: if t=$-\frac{7}{3}$ it will be 0, you can never find the value that make the third equation true, the system is inconsistent.

b)

A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & t+1 \end{bmatrix}$ when t =2, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2R1 + R2 \rightarrow R2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ R3→ $-R3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{R2}{3}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 2R+R3→ $R3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$

$\frac{R3}{-\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ -R3+R1$R1$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\frac{2}{3}$R3+R2→ $R2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ $A^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

c)

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

A^{-1}AX=B A^{-1}

X=B A^{-1}

$$\begin{bmatrix}-3 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 5 & 7 & 8\\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1\\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -12 & 0 & -27 & -25\\ 6 & 8 & -1 & 18 & 17\\ 9 & 11 & 25 & 34 & 33\end{bmatrix}$$

Q2:

$A^{-1}\ B^{-1}$

AB(3A+2BX^T) $B^{-1}A^{-1} = I_2$

A^{-1} AB(3A+2BX^T) $B^{-1}A^{-1} = A^{-1}\ I_2$

B(3A+2BX^T) $B^{-1}A^{-1} = A^{-1}I_2$

B^{-1} B(3A+2BX^T) $B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}I_2$

(3A+2BX^T) $B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}I_2$

(3A+2BX^T) $B^{-1}A^{-1}A = B^{-1}A^{-1}I_2A$

(3A+2BX^T) $B^{-1} = B^{-1}A^{-1}I_2A$

(3A+2BX^T) $B^{-1}B = B^{-1}A^{-1}I_2A$B

3A+2B$X^T = B^{-1}A^{-1}I_2A$B

$(2BX^T)^T = (B^{-1}A^{-1}I_2A\mathrm{B})^T - (3A^T)$

2BX= $(B^{-1}A^{-1}I_2A\mathrm{B})^T - (3A^T)$

X=$\frac{(B^{-1}A^{-1}I_2A\mathrm{B})^T - (3A^T)}{2B}$

X=$\frac{I_2 - (3A^T)}{2B}$

Q3:

A=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$(A^2)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

$((A^2)^{-1})B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & \frac{7}{4}\end{bmatrix}$

$(A^{-2}B)^T = \begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & \frac{7}{4}\end{bmatrix}$