# Université d'Ottawa

Départment de Mathématique et Statistique

MAT 1702C : Méthodes Mathématiques

Professeure: Yasmine Samia

## Examen Pratique 2

**Instructions:**

(a) Vous avez 80 minutes pour compléter cet examen.

(b) Montrez les détails de votre travail et justifiez vos réponses pour avoir des notes complètes.

(c) Tout le travail qui va étre considéré pour la correction devrait être rédigé dans l'espace prévu. Le verso des pages est pour le brouillon. Si vous trouvez que vous avez besoin d'espace supplémentaire afin de répondre à une question particulière, vous devez continuer sur le verso de la page et indiquer celà **clairement**. Sinon, ce que vous écrivez sur le verso des pages ne sera pas considéré pour la correction.

(d) L'utilisation de documents (notes de cours, livres, brouillon, etc), de calculatrice, de téléphones cellulaires ou de tout autre appareil électronique est **interdite**.

(e) La dernière page de l'examen peut être utilisée comme brouillon.

(f) Ne détachez pas le questionnaire!!

Bonne chance!

**Attention:**

- Ce test est pour vous **pratiquer** seulement.
- Il n'y a aucune raison de penser que cet examen va ressembler à l'examen partiel 2.
- Le test sert comme outil pour juger la longueur approximative du test et le type de questions possibles qui peuvent y apparaître.
- Il est important d'étudier **tout** le matériel couvert en classe, et **non** seulement les questions qui sont sur ce test.

1. Déterminez si la matrice suivante est inversible. Si elle est inversible, trouvez son inverse.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -3 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

**Solution:**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+3L_1\to L_3]{L_2-2L_1\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-L_3\to L_2]{L_1-L_3\to L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1-3L_2\to L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -12 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Il s'ensuit alors que la matrice ci-haut est inversible (équivalente par rapport aux lignes à $I$) et que son inverse est donnée par $\begin{bmatrix} -12 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. (a) Calculez le déterminant de la matrice suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

**Solution:** Il est simple de développer selon la deuxième colonne (ou deuxième ligne):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - (5) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

- Développement selon la deuxième ligne:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} &= 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 7(12-10) - 3(3+4) = 7(2) - 3(7) = 14 - 21 = -7 \end{aligned}$$

- Développement selon la deuxième ligne:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1(-8-5) = 13$$

Ainsi $\det A = 2(-7) - 5(13) = -79$.

(b)Est-ce que $A$ est inversible? Justifiez votre réponse.

**Solution:** Oui, puisque $\det A \neq 0$.

3. (a) Soient $A$, $B$ et $C$ trois matrices de type $3 \times 3$ avec:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \det B = -2$$

Ces trois matrices satisfont à l'équation suivante:

$$-B^2A(C^{-1})(B^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculez $\det C$. Justifiez votre réponse.

**Solution:** Puisque $A$ est triangulaire, on a $\det A = 1(\dfrac{1}{2})(3) = \dfrac{3}{2}$. D'après l'équation donnée on a:

$$\begin{aligned}
\det[-B^2A(C^{-1})(B^T)^{-1}] &= -2 \\
(-1)^3 \det(B^2)\det(A)\det((C)^{-1})(\det(B^T)^{-1}) &= -2 \\
(-1)(\det B)^2(\det A)(\frac{1}{\det C})(\det B^{-1}) &= -2 \\
(-1)(\det B)^2(\det A)(\frac{1}{\det C})(\frac{1}{\det B}) &= -2 \\
(-1)(-2)^2(\frac{3}{2})\frac{1}{\det C}(\frac{1}{-2}) &= -2 \\
3\,\frac{1}{\det C} &= -2 \Rightarrow \det C = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(b) Soit
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$
Quelle est la valeur de $\begin{vmatrix} 2b+c & -b & 3a \\ 2e+f & -e & 3d \\ 2h+i & -h & 3g \end{vmatrix}$? Justifiez votre réponse.

**Solution:** La deuxième matrice peut être obtenue de la première à l'aide des opérations suivantes sur les colonnes:

- échange de la 1ère et la troisième colonne $C_1$ et $C_3$ $\Rightarrow$ le déterminant est multiplié par $(-1)$
- remplacement de $C_1$ par $2C_2 + C_1$ $\Rightarrow$ ne change pas le déterminant
- multiplier $C_3$ par 3 $\Rightarrow$ multiplier le déterminant par 3
- multiplier $C_2$ par (-1) $\Rightarrow$ multiplier le déterminant par (-1)

Ainsi le déterminant de la deuxième matrice est égal à
$$(-1)(3)(-1)\det(\text{la première matrice}) = 3(3) = 9$$

Autre méthode:
$$\begin{vmatrix} 2b+c & -b & 3a \\ 2e+f & -e & 3d \\ 2h+i & -h & 3g \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Factoriser } C_2 \text{ par (-1)}]{\text{Factoriser } C_3 \text{ par 3}} -3\begin{vmatrix} 2b+c & b & a \\ 2e+f & e & d \\ 2h+i & h & g \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1-2C_2 \to C_1} -3\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix}$$
$$\xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} -(-3)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3(3) = 9$$

4. Déterminez si les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont des sous-espaces ou non. Justifiez vos réponses.

(a) $U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x+3 \\ 2 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$.

**Solution:** Ce n'est pas un sous-espace puisqu'il ne contient pas le vecteur $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 5a-b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

**Solution:** C'est un sous-espace puisque $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 5a-b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et comme $a, b$ sont des variables arbitraires, on a $V = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ ce qui implique que $V$ est un sous-espace.

(c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c^4 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

**Solution:** Ce n'est pas un sous-espace puisque par exemple $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est dans $W$ mais $(-1)\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ n'est pas dans $H$, puisque $c^4 \geq 0$ pour tout nombre réel $c$.

5. Considérez la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 11 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Trouvez une base de Col $A$.

**Solution:** Il faur réduire la matrice A à la EF ou RREF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 11 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2-2L_1\to L_2]{L_3-3L_1\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3-2L_2\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-L_2\to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes pivots de A sont les première et deuxième colonnes. Alors:

$$\text{Base de Col A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) Déduire la dimension de Nul $A$.

**Solution:** D'après le théorème du rang, $dim\ Nul\ A = n - rg\ A = 5 - 2 = 3$

(a) Trouvez une base de Nul $A$.

**Solution:** Il faut résoudre le système homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ R.R.E.F.} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 - x_5 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3, x_4, x_5 \text{ libres} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 - 2x_4 - x_5 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ base de Nul } A : \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

6. Une certaine économie est composée de deux secteurs: A et B. Pour produire une unité d'output, le secteur A utilise 0.2 unités de son propre secteur et 0.6 unités du secteur B. D'autre part, le secteur B nécessite 0.4 unités de son propre secteur et 0.4 unités du secteur A pour produire une unité d'output.

(a) Ecrire la matrice des coefficients techniques $C$ correspondante à cette économie.

**Solution:**
Si le secteur A est le premier secteur et B est le deuxième, alors

$$C = \begin{bmatrix} .2 & .4 \\ .6 & .4 \end{bmatrix}$$

(b) Déterminez la demande intermédiaire si le secteur A décide de produire 20 unités et le secteur B décide de produire 25 unités.

**Solution:** La demande intermédiaire est donnée par

$$20 \begin{bmatrix} .2 \\ .6 \end{bmatrix} + 25 \begin{bmatrix} .4 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 22 \end{bmatrix}$$

La demande intermédiaire est de 14 unités de A et de 22 unités de B.

(c) Déterminez les niveaux de production requis pour répondre à une demande finale de 32 unités de A et de 12 unités de B.

**Solution:** On doit résoudre l'équation de Leontief $(I - C)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix}$. On a:

$$I - C = \begin{bmatrix} .8 & -.4 \\ -.6 & .6 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad (\mathrm{I} - C)^{-1} = \frac{1}{.24} \begin{bmatrix} .6 & .4 \\ .6 & .8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x} = (\mathrm{I} - C)^{-1} \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Alors secteur A doit produire 100 unités et secteur B 120 unités.

<u>Autre méthode:</u> On résoud la matrice augmentée $[I - C|\vec{d}]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} .8 & -.4 & 32 \\ -.6 & .6 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 320 \\ -6 & 6 & 120 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{L_1}{8} \to L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 40 \\ -6 & 6 & 120 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{6L_1 + L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 40 \\ 0 & 3 & 360 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{L_2}{3} \to L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 40 \\ 0 & 1 & 120 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2 + L_1 \to L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 120 \end{array}\right]$$