Drag. Automne 2013

1741

1. Si $u = (3,\ 0,\ 3)$, $v = (-5,\ 1,\ -8)$ et $w = (1,\ 4,\ 2)$, alors $\|(2u+v)\times w\|$ est égale à:

A. $10\sqrt{5}$
B. 25
C. $2\sqrt{10}$
D. $2\sqrt{5}$
E. $5\sqrt{5}$
F. $5\sqrt{2}$

$$2u+v = (6,0,6)+(-5,1,-8) = (1,1,-2)$$

$$(2u+v)\times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'où $\|(2u+v)\times w\| = \sqrt{100+16+9} = \sqrt{125} = \sqrt{5\cdot 25} = 5\sqrt{5}$

2. Les équations paramétriques de la droite ℓ passant par $(1,\ 1,\ -1)$ et perpendiculaire au plan P d'équation $-2x - y + 3z = 6$ sont données par:

A. $x = 1-2t,\ y = 1+t,\ z = -1+3t,\ t\in\mathbb{R}$
B. $x = 1+t,\ y = 1+t,\ z = -1-3t,\ t\in\mathbb{R}$
~~C. $x = 1+2t,\ y = 1-t,\ z = -1+3t,\ t\in\mathbb{R}$~~
D. $x = 1-t,\ y = 1+t,\ z = -1-6t,\ t\in\mathbb{R}$
E. $x = 1-2t,\ y = 1-t,\ z = -1+3t,\ t\in\mathbb{R}$
F. $x = 1-4t,\ y = 1-t,\ z = -1-3t,\ t\in\mathbb{R}$

Comme ℓ est $\perp$ à P, le vecteur directeur de ℓ est donné par $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ell$, si

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-t \\ -1+3t \end{pmatrix}$$

3. Parmi les vecteurs ci-dessous, lequel est perpendiculaire (orthogonal) aux vecteurs $v_1 =$ (2, 1, −1) et (1, 1, 5)? $= v_2$

Si $w \perp v_1$ et $w \perp v_2$, alors $w \parallel v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$

A. (-4, 0, 3)
B. (3, 0, 2)
C. (1, 0, 1)
D. (2, -5, -1)
E. (1, -2, 0)
F. Aucun des vecteurs ci-dessus

4. Trouver le volume du parallélépipède (P) determiné par les vecteurs $u = (1,\ 1,\ -1)$, $v = (3,\ 1,\ 0)$ et $w = (1,\ -1,\ 3)$.

A. 6
B. -6
C. 16
D. -2
E. 4
F. 2

$\mathrm{Vol}(P) = |(u \times v) \cdot w|$

$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad (u \times v) \cdot w = 1 + 3 - 6 = -2$

D'où $\mathrm{Vol}(P) = 2$.

5. Une équation du plan P passant par les points (1, 2, -1) et (2, 3, 1), et parallèle à l'axe des y est donnée par:

A. $x + y - z = 4$
B. $-3x + 7y - 2z = 3$
C. $x - y = -1$
D. $2x - z = 3$
E. $2y - z = 5$
F. $x + y + z = 2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in P$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in P.$$

D'où $v_1 \times v_2$ est normal à P ; $v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

et l'équ de P est donnée par.

$-2x + z = -2 + (-1) = -3$. ou $\underline{2x - z = 3}$

6. Trouver une équation du plan P qui contient le point (1, 2, 3) et qui est perpendiculaire à la droite d dont les équations paramétriques sont données par:

$$x = 2 + 2t,\ y = 7 - 4t,\ z = -3 + t;\ t \in \mathbb{R}.$$

A. $2x - 4y + z = -3$
B. $2x + 7y - 3z = 7$
C. $2x - 4y + z = -5$
D. $-4x + 2y + z = 3$
E. $2x - 4y + z = 0$
F. $-4x + 2y + z = 4$

vecteur directeur de d : $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où équ de P est donnée par.

$2x - 4y + z = 2 - 8 + 3 = -3$.

7. Si $u = (3,\ 3,\ 3)$ et $v = (4,\ 2,\ 6)$ alors la projection $\mathrm{proj}_v u =$ est donnée par

A. $\frac{9}{7}(3,\ 3,\ 3)$
B. $\frac{12}{7}(3,\ 3,\ 3)$
C. $\frac{11}{7}(3,\ 3,\ 3)$
D. $\frac{9}{7}(2,\ 1,\ 3)$
E. $\frac{12}{7}(2,\ 1,\ 3)$
F. $\frac{11}{7}(2,\ 1,\ 3)$

$$\mathrm{proj}_v(u) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}\, v = \frac{12+6+18}{16+4+36} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{36}{56} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{72}{56} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{9 \cdot 8}{7 \cdot 8} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

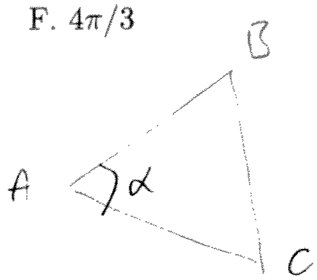
$$= \frac{9}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8. Si $A = (2,\ 4,\ 1)$, $B = (3,\ 0,\ 9)$ et $C = (1,\ 4,\ 0)$, déterminer l'angle $\angle BAC$.

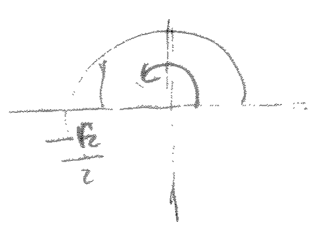
A. $\pi/2$
B. $3\pi/4$
C. $\pi/6$
D. $\pi/3$
E. $\pi/4$
F. $4\pi/3$

$\alpha = \measuredangle BAC$: On a .

$$\cos \alpha = \frac{(AB) \cdot (AC)}{\|AB\|\,\|AC\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{81}\ \sqrt{2}}$$



$$= \frac{-9}{9\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



D'où $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

9. Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $a + b\,i$ où a et b sont réels.

$$z_1 = \frac{1}{1-i}$$

$$z_2 = (2+i)(1+i)$$

Rappel : si $z = a+ib$

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

A. $z_1 = (1/2) - (1/2)i$; $z_2 = 1 - 3i$
B. $z_1 = (1/2) + (1/2)i$; $z_2 = 1 + 3i$
C. $z_1 = 2 - (1/4)i$; $z_2 = 6 - 2i$
D. $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 4$
E. $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 4 + 4i$
F. $z_1 = -1 + i$; $z_2 = 2 + 4i$

Ici si $z = 1-i$, alors

$$z_1 = \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - i\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}(1+i)$$

Vérifions que B est la bonne réponse ;

$$(2+i)(1+i) = (2-1) + i(2+1) = 1+3i$$

---

10. Le point d'intersection de la droite passant par les points $(1,\ 1,\ 0)$ et $(0,\ 1,\ 0)$ et du plan P d'équation $x + y - z = 1$ est donné par:

A. $(1/2,\ 1/2,\ 0)$
B. $(0,\ 1/2,\ -1/2)$
C. $(0,\ 1,\ 0)$
D. $(1/2,\ 0,\ -1/2)$
E. $(-1,\ 0,\ -1)$
F. $(1,\ 0,\ 0)$

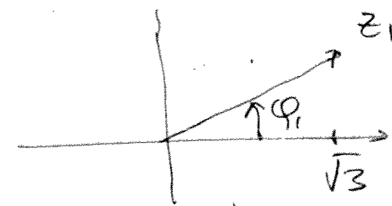
Rem : $(0,1,0) \in P$ et $(1,1,0) \notin P$.

D'où la réponse est $(0,1,0)$.

11. Calculer la forme polaire du nombre complexe

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{-1-i}$$

$z_1 = \sqrt{3+1}\; e^{i\varphi_1} = 2e^{i\varphi_1}$

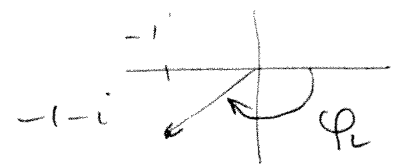


A. $\sqrt{2}(\cos(-\pi/12) + i\sin(-\pi/12))$
B. $\sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12))$
C. $\sqrt{2}(\cos(-5\pi/12) + i\sin(-5\pi/12))$
D. $\sqrt{2}(\cos(11\pi/12) + i\sin(11\pi/12))$
E. $\sqrt{2}(\cos(-7\pi/12) + i\sin(-7\pi/12))$
F. $\sqrt{2}(\cos(5\pi/12) + i\sin(5\pi/12))$

$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2}$

D'où $\varphi_1 = \pi/6$

$z_2 = -1-i = \sqrt{2}\, e^{i\varphi_2} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$



D'où $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\pi/6}}{\sqrt{2}\,e^{-i3\pi/4}} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{2+9}{12}\pi} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11}{12}\pi}$

$\hat{T}$ A B C

12. Quelle est l'aire du triangle dont les sommets sont $(4,\ 1,\ -1), (6,\ 3,\ 0)$ et $(6,\ 10,\ 1)$?

A. 13
B. 15
C. 13/2
D. 15/2
E. 11
F. 17/2

$\text{Aire}(\hat{T}) = \frac{1}{2}\|BA \times BC\|$

$BA = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix} \quad BC = \begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix} \quad AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}+5\\2\\-14\end{pmatrix}$

D'où $\|BA\times BC\| = \sqrt{25+4+4\cdot 49} = \sqrt{25+4(50)}$

$= \sqrt{25(1+8)} = 5\cdot 3 = 15$ D'où D