MAT 1748-Hiver 2013-Devoir #1

A remettre le Lundi 21 Janvier au début du cours

Nom Solution

Prénom

Numéro d'étudiant

- **Veuillez imprimer le devoir et écrire vos solutions dans l'espace donné.**
- Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les pages supplémentaires si nécessaire mais assurez-vous de l'indiquer clairement.
- Il y a 6 questions dans ce devoir.
- Vous devez répondre à toutes les questions.
- Veuillez rédiger vos réponses de manière lisible et logique.

Question 1. **[4 points]** Une formule logique ϕ contient trois atomes X, Y et Z. Le tableau de vérité de ϕ est donné:

X	Y	Z	ϕ
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

Donner une formule logique équivalente à ϕ. La formule ne doit pas contenir d'autres symboles que les variables X, Y et Z, les connectifs $\neg$ et $\rightarrow$ et les parenthèses si nécessaires.

<u>Solution</u> Noter que $\phi \equiv ((X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z))$.

Alors $\phi \equiv (\neg(X \wedge Y \wedge Z) \longrightarrow (\neg X \wedge Y \wedge Z))$ [Car $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$]

$\equiv ((\neg X \vee \neg Y \vee Z) \longrightarrow \neg(X \vee \neg Y \vee \neg Z))$ (De Morgan)

$\equiv (((X \longrightarrow \neg Y) \vee Z) \longrightarrow \neg((\neg X \longrightarrow \neg Y) \vee \neg Z))$ [Car $(\neg p \vee q) \equiv (p \to q)$]

$\equiv ((\neg(X \to \neg Y) \to Z) \longrightarrow \neg(\neg(\neg X \to \neg Y) \to \neg Z))$ [Car $(\neg p \vee q) \equiv (p \to q)$]

$\phi \equiv ((\neg(X \to \neg Y) \to Z) \to \neg(\neg(\neg X \to \neg Y) \to \neg Z))$

Question 2. **[4 points]** Considérer la formule logique:

$$\phi: \ (((\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to C)) \to (A \vee C)).$$

Utiliser les équivalences logiques de base pour trouver une formule logique ψ **logiquement équivalente** à ϕ et qui satisfait les conditions suivantes:

- Les seuls symboles permis dans ψ sont les atomes A, B et C, les connectifs $\neg$ et $\vee$ et les parenthèses si nécessaires.
- Le connectif $\neg$ peut apparaître seulement devant un atome (par exemple, $\neg A$ est permis mais $\neg(A \vee B)$ ne l'est pas).
- Chaque atome figure **au plus** une fois dans ψ.

Solution $(((\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to C)) \to (A \vee C)) \equiv$

$(\neg((\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to C)) \vee (A \vee C))$ ---------- $[(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)]$

$\equiv (((\neg A \to \neg B) \wedge \neg(\neg A \to C)) \vee (A \vee C))$ ---------- $[\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)]$

$\equiv (((A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge \neg C)) \vee (A \vee C))$ ---------- $[(p \to q) \equiv (\neg p \vee q),\ \neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)]$

$\equiv ((\underbrace{A \wedge \neg A \wedge \neg C}_{\mathbb{F}}) \vee (\neg B \wedge \neg A \wedge \neg C)) \vee (A \vee C))$ ------ $[(p \vee q) \wedge r) \equiv ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))]$

$\equiv ((\neg B \wedge \neg A \wedge \neg C) \vee (A \vee C))$ ---------- $[(\mathbb{F} \vee p) \equiv p]$

$\equiv ((\neg B \vee A \vee C) \wedge (\underbrace{\neg A \vee A \vee C}_{\mathbb{V}}) \wedge (\underbrace{\neg C \vee A \vee C}_{\mathbb{V}}))$ ------ $[((p \wedge q \wedge r) \vee h) \equiv ((p \vee h) \wedge (q \vee h) \wedge (r \vee h)]$

$\equiv (A \vee \neg B \vee C)$ ---------- $[(p \wedge \mathbb{V}) \equiv p]$

Question 3. **[6 points]** À l'aide des tables de vérité, décider si les formules suivantes sont des tautologies, contradictions ou formules contingentes. Si vous trouvez qu'une formule est contingente, donner toutes les valuations pour lesquelles la formule est fausse.

(1) $((\neg Y \to \neg X) \to (Y \to X))$ (2) $((\neg Z \land Y) \to (X \lor Y))$

(3) $(\neg(X \to \neg Y) \leftrightarrow \neg(\neg X \to Y))$

Solution (1)

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$(\neg Y \to \neg X)$	$(Y \to X)$	$((\neg Y \to \neg X) \to (Y \to X))$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

La formule est contingente. Il y a une seule valuation qui rend la formule fausse : $v(X) = F$ et $v(Y) = V$

(2)

X	Y	Z	$\neg Z$	$(\neg Z \land Y)$	$(X \lor Y)$	$(\neg Z \land Y) \to (X \lor Y)$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

La formule est une tautologie.

(3)

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$(X \to \neg Y)$	$\neg(X \to \neg Y)$	$(\neg X \to Y)$	$\neg(\neg X \to Y)$	$(\neg(X \to \neg Y) \leftrightarrow \neg(\neg X \to Y))$
V	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	F	V	F

La formule est contingente. Les valuations pour lesquelles la formule est fausse sont :

X	Y
V	V
F	F

Question 4. [3 points] Les formules $((X \to \neg Y) \to (\neg X \wedge \neg Y))$ et $((Y \to X) \wedge (\neg Y \to \neg X))$ sont-elles **logiquement équivalentes**? Justifier votre réponses.

Solution on Compare les tableaux de vérité de chaque formule :

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$(X \to \neg Y)$	$(\neg X \wedge \neg Y)$	$((X \to \neg Y) \to (\neg X \wedge \neg Y))$	$(Y \to X)$	$(\neg Y \to \neg X)$	$((Y \to X) \wedge (\neg Y \to \neg X))$
V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

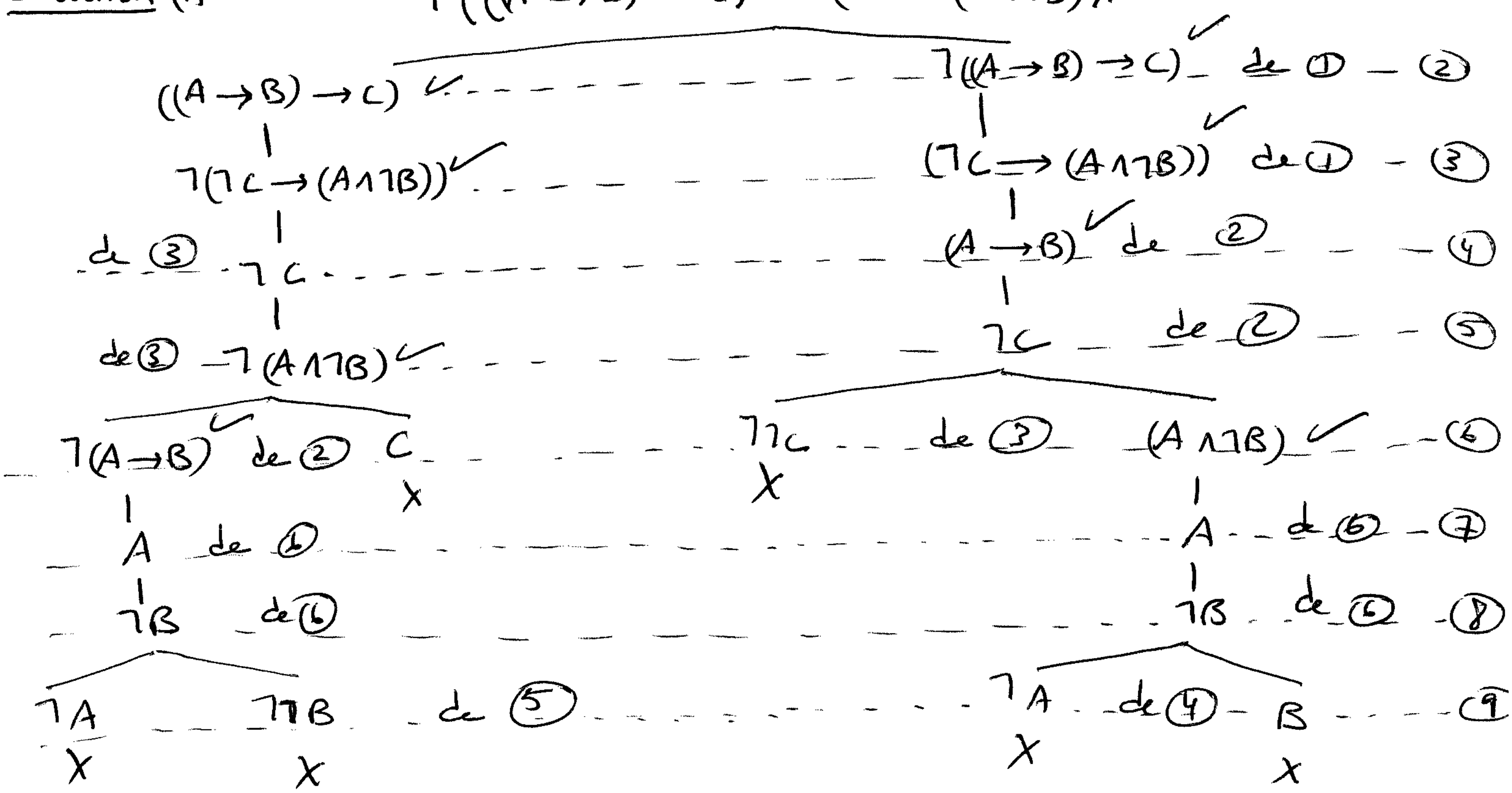
Même tableau

Comme les deux formules ont le même tableau de vérité, elles sont équivalents.

Question 5. [6 points] Dans chaque cas, déterminer si la formule est une tautologie ou non en utilisant la règle de **l'arbre de vérité**. Dans le cas où la proposition n'est pas une tautologie, donner les valuations des atomes qui correspondent à **F** dans la table de vérité de la formule.

$$(1)\quad (((A \to B) \to C) \leftrightarrow (\neg C \to (A \wedge \neg B)))$$
$$(2)\quad ((X \to Y) \leftrightarrow (\neg(\neg X \vee \neg Y) \to (Y \vee \neg Z)))$$

Solution (1)



Toutes les branches sont fermées. La formule est une tautologie.

(2)

$\neg((X \to Y) \leftrightarrow (\neg(\neg X \vee \neg Y) \to (Y \vee \neg Z)))$ ①

$(X \to Y)$	de ①	$\neg(X \to Y)$	②
$\neg(\neg(\neg X \vee \neg Y) \to (Y \vee \neg Z))$	de ①	$(\neg(\neg X \vee \neg Y) \to (Y \vee \neg Z))$	③
		X de ②	④
de ③ $\neg(\neg X \vee \neg Y)$			
		$\neg Y$ de ②	⑤
de ③ $\neg(Y \vee \neg Z)$			
		$(\neg X \vee \neg Y)$ de ③ $(Y \vee \neg Z)$	⑥
de ④ $\neg\neg X$			
de ④ $\neg\neg Y$		de ⑥ $\neg X$ — $\neg Y$; Y de ⑥ $\neg Z$	⑦
		X ; X	⑧
de ⑤ $\neg Y$			
de ⑧ $\neg\neg Z$			⑨
X			

Il y a des branches ouverts, la formule est contingente.

Les valuations qui correspondent à F dans le tableau de vérité sont :

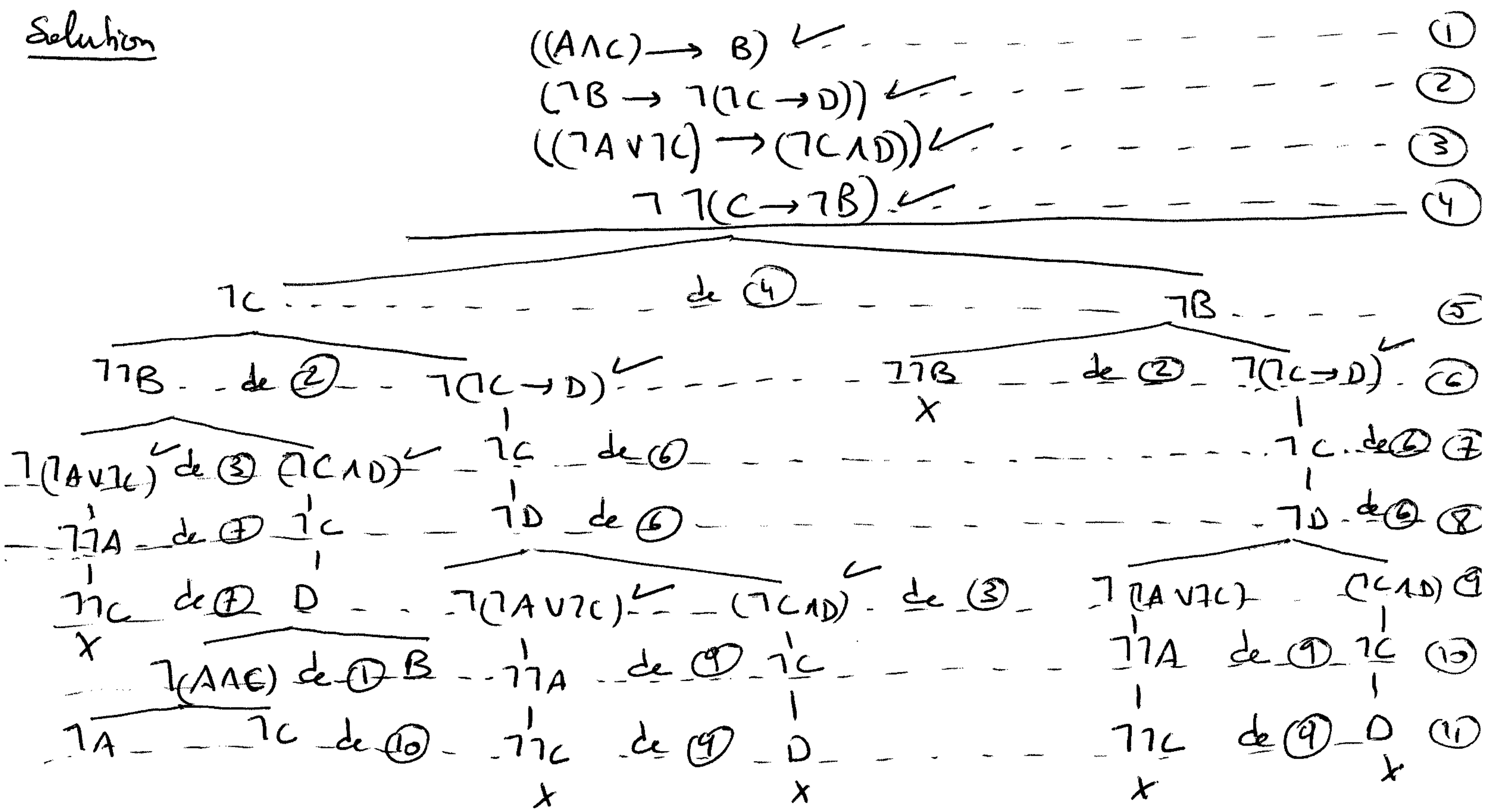
X	Y	Z
V	F	V
V	F	F

Question 6. **[5 points]** Utiliser la méthode de votre choix pour déterminer si l'argument suivant est **valide** ou non. Si vous trouvez qu'il n'est pas valide, donner un **contre-exemple**.

$$((A \land C) \to B)$$
$$(\neg B \to \neg(\neg C \to D))$$
$$\underline{((\neg A \lor \neg C) \to (\neg C \land D))}$$

$$\neg(C \to \neg B)$$

Solution



Il y a des branches ouverts. L'argument n'est pas valide. Le Tableau suivant donne de contre-exemple de l'argument:

A	B	C	D
F	V	F	V
V	V	F	V