

MAT 2771
Test de mi-session: Solutionnaire

le 21 octobre, 2010
Temps: 80 minutes

Professeur M. Alvo

Numéro d'**étudiant**: _____ Nom de famille: _____

Prénom: _____

Ceci est un test à livre ouvert. **Les calculatrices sont permises.** Répondez à toutes les questions. **Ecrivez vos réponses dans la table suivante.**

Question	Réponse
1	B
2	A
3	D
4	C
5	E
6	A
7	A
8	E
9	C
10	C
11	D
12	B

NOTE: At the end of the examination, hand in only this page. You may keep the questionnaire.

1. Soit A , B et C trois événements indépendants. Si $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ et $P(C) = 0.6$, calculez $P((A \cup B) \cap C)$.

(A) 0.60 (B)* 0.42 (C) 0.12 (D) 0.68 (E) 0.58

$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) = 0.5(0.6) + 0.4(0.6) - 0.5(0.4)(0.6) = 0.42$$

2. Soit A , B et C trois événements mutuellement exclusifs. Si $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ et $P(C) = 0.6$, calculez $P((A \cap B) \cup C)$.

(A)* 0.60 (B) 0.58 (C) 0.12 (D) 0.68 (E) 0.42

$$P((A \cap B) \cup C) = P(C) + P(A \cap B \cap C') = P(C) = 0.6 \text{ en utilisant les diagrammes de Venn.}$$

3. Les numéros de téléphone dans la région de la capitale nationale contiennent 10 chiffres. Les 3 premiers sont soit 613 (pour l'Ontario) ou 819 (pour le Québec); le quatrième chiffre ne peut pas être 0 ou 1; le cinquième chiffre ne peut pas être 0; il n'y a pas de restrictions pour le choix des autres 5 chiffres. Combien de numéros de téléphone différents y a-t-il pour la région de la capitale nationale?

(A) 72×10^5 (B) 72×10^8 (C) $3! \times 72 \times 10^5$ (D)* 144×10^5 (E) 10^5

On a un choix de 2 pour les 3 premiers, 8 pour le prochain, 9 pour le second et 10 pour chacun des 5 autres. Donc par le principe de multiplication $2(8)(9)(10)^5 = 144 \times 10^5$

4. Je fréquente en général trois épiceries différentes où j'achète un carton de lait. Les probabilités que le lait sera frais pour au moins deux semaines s'il est acheté aux épiceries A, B, C sont égales respectivement à 0.7, 0.4, 0.3. Je fréquente les épiceries A, B, C 20%, 30% et 50% du temps respectivement. J'achète un carton de lait aujourd'hui. Quelle est la probabilité qu'il sera frais pour au moins deux semaines?

(A) 0.500 (B) 0.700 (C)* 0.410 (D) 0.140 (E) 0.120

Soit E l'événement que le lait sera frais pour au moins deux semaines après l'achat. $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)$

$$= (0.7)(0.2) + (0.4)(0.3) + (0.5)(0.3) = 0.410$$

5. En faisant référence à la question #4, si dans deux semaines le lait acheté est encore frais, quelle est la probabilité que je l'ai acheté de l'épicerie C?

(A) 0.500 (B) 0.300 (C) 0.293 (D) 0.341 (E)* 0.366

$$P(C|E) = P(E|C)P(C)/P(E) = 0.15/0.410 = 0.366$$

6. Un étudiant écrit trois tests de mi-session cette semaine. Les probabilités de réussir dans le test des cours Mat 2771, Mat 2520 et Mat 2541 sont respectivement égales à 0.80, 0.7 et 0.6. Si les résultats dans les trois tests sont indépendants quelle est la probabilité qu'il échoue au plus à un test de mi-session parmi ces trois?

(A)* 0.788 (B) 0.664 (C) 0.024 (D) 0.976 (E) 0.900

On calcule les probabilités de réussir à tous les 3 ainsi que les probabilités de réussir à exactement 2. Soit

$$(.8)(.7)(.6) + (.8)(.7)(.4) + (.8)(.3)(.6) + (.2)(.7)(.6) = .788$$

7. On lance une pièce de monnaie trois fois dans des conditions indépendantes et identiques. Je gagne \$2 si j'obtiens exactement une pile ou trois piles. Autrement, je perds \$1.50. La probabilité d'obtenir une pile dans un lancer est égale à 0.4. Si la variable X représente le gain, calculez $\text{Var}[X]$ à deux décimales

(A) 3.06* (B) 0.24 (C) 3.12 (D) 0 (E) 0.75

La fonction de masse de X est donnée par:

$$f(2) = P(1 \text{ pile ou } 3 \text{ piles}) = \binom{3}{1} (0.4)^1 (0.6)^2 + \binom{3}{3} (0.4)^3 (0.6)^0 = 0.496$$

$$f(-1.50) = 1 - 0.496 = 0.504$$

$$E[X] = \sum x f(x) = (2) f(2) + (-1.5) f(-1.5) = (2) 0.496 + (-1.5) 0.504 = 0.236$$

$$E[X^2] = \sum x^2 f(x) = (2)^2 f(2) + (-1.5)^2 f(-1.5) = (2)^2 0.496 + (-1.5)^2 0.504 = 3.118$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X] = 3.118 - 0.236^2 = 3.0623$$

8. Quelle est la moyenne d'une variable X dont la fonction génératrice est donnée par

$$M_X(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-t} \quad (1)$$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E)* $-\frac{1}{2}$

La variable X prend la valeur 1 avec probabilité 1/4 et -1 avec probabilité 3/4.

Donc $E[X] = 1(1/4) + (-1)(3/4) = -1/2$

9. Dans un système de communication, il y a en moyenne une erreur de transmission à toutes les 10 secondes. Si le nombre d'erreurs suit une loi de Poisson, quelle est la probabilité qu'il y ait plus d'une erreur lors d'une communication qui dure 30 secondes?

(A) $1-2e^{-1}$ (B) $1-e^{-1}$ (C)* $1-4e^{-3}$ (D) $1-3e^{-3}$ (E) $1-e^{-3}$

Le nombre moyen d'erreurs est donnée par $\lambda = \frac{30}{10} = 3$.

$P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-1-e^{-3}-3e^{-3}=1-4e^{-3}$

10. Soit une variable aléatoire X ayant la fonction de répartition suivante:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq t < 1.5 \\ 1 & t \geq 1.5 \end{cases} \quad (2)$$

Calculez la probabilité conditionnelle que X soit plus grand que 1.2 étant donné que X est plus grand que 0.99.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C)* $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

$P(X > 1.2 | X > 0.99) = \frac{P(X>1.2, X>0.99)}{P(X>0.99)} = \frac{P(X>1.2)}{P(X>0.99)} = \frac{1-1/2}{1-1/3} = \frac{1/2}{2/3} = 3/4$

11. La densité d'une variable aléatoire discrète est

x	0	1	2	3
$f(x)$	c	$c/3$	$2c$	$5c/2$

(3)

Calculez $P(1.5 \leq X < 3)$.

On calcule la valeur de la constante c puisque la somme $\sum f(x) = 1$.

$c+c/3+2c+5c/2=35c/6=1$; donc $c=6/35$.

$P(1.5 \leq X < 3) = P(X = 2) = 2c = 2(6/35) = 12/35$

(A) $\frac{18}{35}$ (B) $\frac{30}{35}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D)* $\frac{12}{35}$ (E) $\frac{4}{5}$

12. Dans un examen à choix multiple, il y a 5 réponses possibles pour chaque question dont une seule est correct. Dans un examen qui comporte 6 questions, quelle est la probabilité de répondre correctement à 3 questions seulement si il devine à chaque fois?

(A) $\frac{\binom{6}{3}}{2^5}$ (B) $\frac{4^4}{5^5}$ (C) $\frac{1}{2^6}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{5}{16}$

On utilise la binomiale avec $n=6$, $p=1/5$.

$$P(X=3) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^4}{5^5}$$