Faculté des sciences »
Département de mathématiques et de statistique

Solutionnaire pour l'examen final
MAT 2777
Hiver 2011

Questions à réponses courtes

[4] 1.

(a)

$$1 = \sum_{x=3}^{5} f(x) = 2\,c + c + 2\,c = 5\,c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{5}.$$

(b)

$$P(X = 4 | X \geq 4) = \frac{P(\{X = 4\} \cap \{X \geq 4\})}{P(X \geq 4)} = \frac{f(4)}{f(4) + f(5)} = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$$

(c)

$$E[X] = 3\left(\frac{2}{5}\right) + 4\left(\frac{1}{5}\right) + 5\left(\frac{2}{5}\right) = 4.$$

(d)

$$P(X \geq \mu) = P(X \geq 4) = f(4) + f(5) = \frac{3}{5}.$$

[4] 2.

(a) L'histogramme est approximativement symétrique et il y a une tendence linéaire dans le diagramme à échelle normale, alors il est raisonnable de supposer que la teneur en goudron est normalement distribuée.

(b) On veut tester $H_0 : \mu = 20$ contre $H_1 : \mu > 20$. La valeur observée de la statistique du test est

$$t_0 = \frac{\overline{x} - 20}{s/\sqrt{n}} = \frac{14{,}112 - 20}{0{,}038\ 7} = -152.$$

Région critique : Rejet de H_0 si $t_0 > t_{0{,}05;24} = 1{,}711$.

Puisque $t_0 < 1{,}711$, alors les preuves ne sont pas suffisantes pour conclure que $\mu > 20$ à $\alpha = 5\%$.

Solution Alternative : On calcul la valeur P :

$$P = P(T > -152) > 0{,}5,$$

où T suit une loi $t(24)$. Puisque $P > 0{,}05$,alors les preuves ne sont pas suffisantes pour conclure que $\mu > 20$ à $\alpha = 5\%$.

(c) Un I.C. à 95% pour μ est

$$\overline{x} \pm t_{0,025;24} \frac{s}{\sqrt{n}} = 14{,}112 \pm 2{,}064\,(0{,}038\ 7) = [14{,}03; 14{,}19].$$

[4] 3.

(a) Il y a une tendance linéaire dans le nuage des points. Alors, il est raisonnable d'utiliser le modèle de régression linéaire simple $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$.

(b) La droite estimée est $\hat{y} = 0{,}001 + 0{,}503\,x$. Une estimation ponctuelle pour le poids moyen en grammes pour une période de $x = 5$ heures est

$$\hat{\mu}_{Y|x=5} = 0{,}001 + 0{,}503\,(5) = 2{,}516.$$

(c) Un I.C. à 95% pour le poids moyen en grammes pour une période de $x = 5$ heures est

$$\begin{aligned} & \hat{\mu}_{Y|x=5} \pm t_{0,025,12} \sqrt{\hat{\sigma}^2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(5-\overline{x})^2}{S_{xx}}} \\ = \quad & 2{,}516 \pm 2{,}179\,\sqrt{1{,}13} \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{(5-15)^2}{910}} \end{aligned}$$

N.B. Il y a une erreur dans $\overline{x}$ dans l'énoncé. C'est plutôt $\overline{x} = 15$.

(d) Le coefficient de détermination est $R^2 = 94{,}5\%$. Alors, $94,5\%$ de la variabilité dans les poids est expliqué par la régression contre le temps.

[4] 4.

(a) On test $H_0 : \mu = 4{,}5$ contre $H_1 : \mu \neq 4{,}5$ à $\alpha = 5\%$.

Région critique : Rejet de H_0 si $z_0 < -z_{0,025} = -1.96$ ou si $z_0 > z_{0,025} = 1{,}96$, où

$$z_0 = \frac{\overline{x} - 4{,}5}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Ceci est équivalent à rejeter H_0 quand

$$\overline{x} < -z_{0,025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + 4{,}5 = -1{,}96 \left(\frac{1{,}5}{\sqrt{25}} \right) + 4{,}5 = 3{,}912$$

ou si

$$\overline{x} > z_{0,025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + 4{,}5 = 1{,}96 \left(\frac{1{,}5}{\sqrt{25}} \right) = 5{,}088.$$

La probabilité de commettre une erreur de deuxième espèce (type II) quand $\mu = 4$ est

$$\begin{aligned}
\beta(4) &= P(\text{ne pas rejeter } H_0 | \mu = 4) \\
&= P(3{,}912 < \overline{X} < 5{,}088) \\
&= \Phi\left(\frac{5{,}088 - 4{,}0}{1{,}5/\sqrt{25{,}0}}\right) - \Phi\left(\frac{3{,}912 - 4{,}0}{1{,}5/\sqrt{25{,}0}}\right) \\
&= \Phi(3{,}63) - \Phi(-0{,}29) \\
&= 0{,}999\ 9 - 0{,}385\ 9 = 0{,}614
\end{aligned}$$

(b) La valeur observée de la statistique est

$$z_0 = \frac{3{,}9 - 4{,}5}{1{,}5/\sqrt{25}} = -2.$$

La valeur P est

$$P = 2\,P(Z > |-2|) = 2\,P(Z > 2{,}0) = 2\,(1 - 0{,}977\ 25) = 0{,}045\ 5.$$

Puisque $P < \alpha$, on peut rejeter H_0.

Questions à choix multiples :

[1] 1. La probabilité de choisir 2 ampoules défectueuses dans une sélection au hasard sans remplacement de 3 ampoules parmi une population de 12 ampoules ayant 3 ampoules défectueuses est

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{9}{1}}{\binom{12}{3}} = 0{,}122.$$

[1] 2. Résoudre

$$n \geq \left[\frac{z_{0,05}\sigma}{E}\right]^2 = \left[\frac{(1{,}645)(\sqrt{0{,}25})}{0{,}05}\right]^2 = 270{,}60.$$

On sélectionne $n = 271$ observations.

[1] 3. Soit X le nombre d'appels en 12 minutes. X suit une loi Poisson de paramètre $\lambda = 20\,(12/60) = 4$. On veut

$$P(X = 0) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} = 0{,}018\ 3.$$

Solution Alternative : Soit T le temps d'attente (en heures) pour un appel. T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 20$. On veut

$$P(T > 12/60) = 1 - F(12/60) = 1 - [1 - e^{-20(12/60)}] = e^{-4} = 0{,}018\ 3.$$

[1] 4.

$$4 = E((X - Y)^2) = E(X^2) - 2\,E(X\,Y) + E(Y^2) = 2 - 2\,E(X\,Y),$$

puisque $E(X^2) = E(Y^2) = 1$. Alors, $E(X\,Y) = -1$. Les variances sont

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - [E(X)]^2 = 1 - 0^2 = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_Y^2 = E[Y^2] - [E(Y)]^2 = 1 - 0^2 = 1,$$

puisque $E(X) = E(Y) = 0$. Donc, la corrélation est

$$\rho = \frac{E(X\,Y) - E(X)E(Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = -1.$$

[1] 5. Soit X le nombre d'éléments requis afin d'obtenir un élément défectueux. X suit une loi géométrique avec $p = 0{,}01$. On veut

$$P(X \geq 50) = 1 - P(X \leq 49) = 1 - [1 - (0{,}99)^49] = 0{,}61.$$

[1] 6.

$$P(4 < X < 5) = F(5) - F(4) = \left[1 - \frac{4}{5^2}\right] - \left[1 - \frac{4}{4^2}\right] = 0{,}09.$$

[1] 7. Soit X une variable aléatoire normale avec $\mu = 4.35$ et $\sigma = 0.59$. On veut

$$P(X > 5.5) = 1 - \Phi\left(\frac{5.5 - 4.35}{0.59}\right) = 1 - \Phi(1.95) = 1 - 0.9744 = 0.0256.$$

[1] 8. L'erreur type est $0{,}004/\sqrt{15} = 0{,}001$.

[1] 9. Un I.C. à 95% pour μ est

$$\overline{x} \pm t_{0{,}025;14}\frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}506 \pm 2{,}145(0{,}001) = [0{,}504, 0{,}508].$$

[1] 10. Puisque $\frac{\overline{X}-5}{\sigma/\sqrt{20}} \sim N(0,1)$, alors $c = z_{0{,}1} = 1{,}28$.

[1] 11. A et B sont indépendants, puisque

$$P(A)P(B) = (0{,}8)(0{,}35) = (0{,}28) = P(A \cap B).$$

[1] 12. Soit X le nombre qui sont mûrs et prêts à manger parmi $n = 18$. X suit une loi binomiale avec $n = 18$ et $p = 0{,}9$. On veut

$$P(X \geq 17) = \binom{18}{17}(0{,}9)^{17}(0{,}1)^1 + \binom{18}{18}(0{,}9)^{18}(0{,}1)^0 = 0{,}450.$$