

## Examen de mi-session 2

NOM de famille: SOLUTIONS

Prénom: VERSION B

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (Texas Instruments TI-30, TI-34 et Casio fx-260, fx-300) sont autorisées. **Aucune exception ne sera tolérée.** Cet examen ne nécessite pas de calculatrice.
- Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utilisez le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- Cet examen comporte sept questions à développement et deux questions à choix multiples. Chaque question vaut entre 4 et 10 points. L'examen est noté sur 50 et compte 3 points boni.
- Les questions à développement requièrent une solution complète et claire. Une partie importante des points est allouée à la solution.

1. (i) [5 points] Calculez  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 - n)}{\ln(n)}$ .

**Solution:** C'est une expression indéterminée de la forme  $\frac{\infty}{\infty}$ . Pour déterminer la limite, on applique la règle de l'Hospital à la fonction  $f(x) = \frac{\ln(x^2 - x)}{\ln(x)}$ . Cela donne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \ln(x^2 - x)}{\frac{d}{dx} \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x - 1}{x^2 - x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x}$$

Pour calculer cette dernière limite, on pourrait de nouveau appliquer la règle de l'Hospital mais il est plus simple de diviser numérateur et dénominateur par  $x^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - (1/x)}{1 - (1/x)} = 2.$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 - n)}{\ln(n)} = \boxed{2}$ .

2. [5 points] Déterminez la fraction irréductible  $p/q$  (avec  $q > 0$ ) dont le développement décimal est  $0.3\overline{78} = 0.3787878\dots$

**Solution:** On a

$$0.3\overline{78} = 0.3 + \left( \frac{78}{10^3} + \frac{78}{10^5} + \frac{78}{10^7} + \dots \right).$$

La série entre parenthèses est une série géométrique de terme initial  $a = 78/1000$  et de raison  $r = 1/100$ . On en déduit que

$$0.3\overline{78} = \frac{3}{10} + \frac{78/1000}{1 - (1/100)} = \frac{3}{10} + \frac{78}{990} = \frac{375}{990} = \boxed{\frac{25}{66}}.$$

Donc  $p = 25$  et  $q = 66$ .

3. [5 points] On considère la série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n+1)}$ .

(i) Montrez qu'il s'agit d'une série télescopique en donnant une formule simple pour les sommes partielles  $s_k = \sum_{n=2}^k \frac{2}{(n-1)(n+1)}$ .

**Solution:** On trouve

$$\frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=2}^k \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=2}^k \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^k \frac{1}{n+1} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-1} \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

(ii) En déduire la somme de la série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n+1)}$

**Solution:**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$ .

4. [5 points] En utilisant un test de comparaison approprié, déterminez si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3 \sin(n+1)}{\sqrt{n} + 4}$  est convergente ou divergente.

**Solution:** Pour tout  $n \geq 1$  on a  $-1 \leq \sin(n+1) \leq 1$  et  $1 \leq \sqrt{n}$ , donc

$$1 = 4 - 3 \leq 4 + 3 \sin(n+1) \leq 4 + 3 = 7 \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \leq \sqrt{n} + 4 \leq 5\sqrt{n}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{5\sqrt{n}} \leq \frac{4 + 3 \sin(n+1)}{\sqrt{n} + 4} \leq \frac{7}{\sqrt{n}}$$

Comme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5\sqrt{n}} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$  (série de Riemann avec  $p = 1/2 \leq 1$ ), on conclut par comparaison que la série donnée est divergente.

5. [10 points] Pour chacune des séries ci-dessous, combien de termes doit-on additionner pour que l'erreur d'approximation (c'est-à-dire le reste  $R_k$ ) soit  $\leq 3^{-16}$ ? Justifiez votre réponse en indiquant clairement, dans chaque cas, le critère que vous utilisez.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^4}$$

C'est une série à valeurs **positives** de terme général  $a_n = f(n)$  où  $f(x) = \frac{1}{(x+2)^4}$  est une fonction décroissante de  $x$  à valeurs positives pour  $x \geq 0$ . En posant

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^4} \quad \text{et} \quad s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{(n+2)^4} \quad (\text{pour } k \geq 1),$$

le critère de l'intégrale donne

$$R_k = s - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^4} \leq \int_k^{\infty} \frac{1}{(x+2)^4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{3(x+2)^3} \right]_k^t = \frac{1}{3(k+2)^3}.$$

On trouve

$$\frac{1}{3(k+2)^3} \leq 3^{-16} \iff 3(k+2)^3 \geq 3^{16} \iff k+2 \geq 3^5 \iff k \geq 241.$$

Il suffit donc d'additionner 241 termes.

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^4}$$

**Solution:** C'est une série **alternée** de terme général  $a_n = (-1)^n b_n$  où  $b_n = \frac{1}{(n+2)^4}$  est une fonction décroissante de  $n$  pour  $n \geq 1$ , avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Donc la série est convergente en vertu du test des séries alternées et, en posant

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^4} \quad \text{et} \quad s_k = \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n}{(n+2)^4} \quad (\text{pour } k \geq 1),$$

l'erreur d'approximation de  $s$  par  $s_k$  est

$$R_k = |s - s_k| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^4} \right| \leq \frac{1}{(k+3)^4}.$$

On trouve

$$\frac{1}{(k+3)^4} \leq 3^{-16} \iff (k+3)^4 \geq 3^{16} \iff k+3 \geq 3^4 \iff k \geq 78.$$

Il suffit donc d'additionner 78 termes.

6. [10 points] Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{2^n(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{2^{n+1}|x+1|^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{2^n|x+1|^n} = 2|x+1| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 2|x+1| \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \\ &= 2|x+1| \sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}} \rightarrow 2|x+1| \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc en vertu du test du quotient,

- la série converge si  $2|x+1| < 1 \iff |x+1| < 1/2 \iff x \in (-3/2, -1/2)$ ,
- elle diverge si  $2|x+1| > 1 \iff |x+1| > 1/2 \iff x < -3/2$  ou  $x > -1/2$ .

Son rayon de convergence est  $\boxed{R = 1/2}$ .

Pour  $x = -3/2$ , la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(-1/2)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = 1/\sqrt{n+1}$  décroissant pour  $n \geq 1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Donc elle est convergente en vertu du test des séries alternées.

Pour  $x = -1/2$ , la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(1/2)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

car c'est une série de Riemann avec  $p = 1/2 \leq 1$ . Donc elle est divergente.

L'intervalle de convergence de la série est  $[-3/2, -1/2)$ .

7. [5 points] Donnez le développement en série entière autour de  $x = 0$  de la fonction  $\frac{1}{5x+3}$ . Sur quel intervalle la série représente-t-elle la fonction?

**Solution:** On sait que

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \quad \text{si } |y| < 1.$$

La fonction qui nous intéresse est

$$\frac{1}{5x+3} = \frac{1/3}{(5x/3)+1} = \frac{1/3}{1-(-5x/3)}.$$

Donc en appliquant la formule précédente avec  $y = -5x/3$  on obtient

$$\frac{1}{5x+3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-5x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n x^n}{3^{n+1}}$$

si  $|-5x/3| < 1$ , c'est-à-dire si  $|x| < 3/5$ . La série ci-dessus représente  $\frac{1}{5x+3}$  pour  $x$  dans l'intervalle  $(-3/5, 3/5)$ .

8. Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n}$ .

(i) [4 points] Laquelle des séries ci-dessous est égale à  $f'(2)$ ? Encerclez la lettre qui correspond à la bonne réponse.

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$  (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$   (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}}$  (E)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$  (F)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$

**Solution:** On vérifie facilement que le rayon de convergence de cette série est  $R = 4$ . En la dérivant termes à termes, on trouve

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{nx^n}{4^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{4^n},$$

pour tout  $x$  avec  $|x| < 4$ , donc

$$f'(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}}$$

La réponse est (D).

(ii) [4 points] Laquelle des séries ci-dessous est égale à  $\int_0^1 f(x)dx$ ? Encerclez la lettre qui correspond à la bonne réponse.

(A)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)4^n}$  (B)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{3n}}$  (C)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)2^{3n}}$   
 (D)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{3n+1}}$  (E)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}$  (F)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{3n+1}}$

**Solution:** En intégrant termes à termes, on trouve

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{nx^n}{4^n} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)4^n},$$

où  $C$  désigne la constante d'intégration. Cette fonction est une primitive de  $f$  pour  $|x| < 4$ , c'est-à-dire sur l'intervalle  $(-4, 4)$ . Donc

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n1^{n+1}}{(n+1)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)4^n}$$

La réponse est (A).