MAT 1722 A. Hiver 2012. Mercredi 13 mars. 8h30–9h50 Prof. D. Roy

Examen de mi-session 2

NOM de famille: SOLUTIONS

Prénom: VERSION A

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (Texas Instruments TI-30, TI-34 et Casio fx-260, fx-300) sont autorisées. **Aucune exception ne sera tolérée**. Cet examen ne nécessite pas de calculatrice.
- Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utilisez le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- Cet examen comporte sept questions à développement et deux questions à choix multiples. Chaque question vaut entre 4 et 10 points. L'examen est noté sur 50 et compte 3 points boni.
- Les questions à développement requièrent une solution complète et claire. Une partie importante des points est allouée à la solution.

1. (i) [5 points] Calculez $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n)}$.

Solution: C'est une expression indéterminée de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour déterminer la limite, on applique la règle de l'Hospital à la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$. Cela donne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}\ln(x^2+1)}{\dfrac{d}{dx}\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1}$$

Pour calculer cette dernière limite, on pourrait de nouveau appliquer la règle de l'Hospital mais il est plus simple de diviser numérateur et dénominateur par x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+x^{-2}} = 2.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n)} = \boxed{2}$.

2. [5 points] Déterminez la fraction irréductible p/q (avec $q > 0$) dont le développement décimal est $1.9\overline{84} = 1.9848484\ldots$

Solution: On a

$$1.9848484\cdots = 1.9 + \left(\frac{84}{10^3} + \frac{84}{10^5} + \frac{84}{10^7} + \ldots\right).$$

La série entre parenthèses est une série géométrique de terme initial $a = 84/1000$ et de raison $r = 1/100$. On en déduit que

$$1.9848484\cdots = \frac{19}{10} + \frac{84/1000}{1-(1/100)} = \frac{19}{10} + \frac{84}{990} = \frac{1965}{990} = \boxed{\frac{131}{66}}.$$

Donc $p = 131$ et $q = 66$.

3. [5 points] On considère la série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$.

(i) Montrez qu'il s'agit d'une série télescopique en donnant une formule simple pour les sommes partielles $s_k = \displaystyle\sum_{n=3}^{k} \frac{4}{n(n+2)}$.

Solution: On trouve

$$\frac{4}{n(n+2)} = 2\frac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}$$

donc

$$\begin{aligned}
s_k &= \sum_{n=3}^{k} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}\right) = \sum_{n=3}^{k} \frac{2}{n} - \sum_{n=3}^{k} \frac{2}{n+2} \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{k-1} + \frac{2}{k}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \cdots + \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2}\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2}.
\end{aligned}$$

(ii) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$

Solution: $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \boxed{\frac{7}{6}}$.

4. [5 points] En utilisant un test de comparaison approprié, déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2\cos(n)}{\sqrt{n}+3}$ est convergente ou divergente.

Solution: Pour tout $n \geq 1$ on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ et $1 \leq \sqrt{n}$, donc

$$3 = 5-2 \leq 5+2\cos(n) \leq 5+2 = 7 \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \leq \sqrt{n}+3 \leq 4\sqrt{n}.$$

On en déduit

$$\frac{3}{4\sqrt{n}} \leq \frac{5+2\cos(n)}{\sqrt{n}+3} \leq \frac{7}{\sqrt{n}}$$

Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4\sqrt{n}} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ (série de Riemann avec $p = 1/2 \leq 1$), on conclut par comparaison que la série donnée est divergente.

5. [10 points] Pour chacune des séries ci-dessous, combien de termes doit-on additionner pour que l'erreur d'approximation (c'est-à-dire le reste R_k) soit $\leq 2^{-9}$?
Justifiez votre réponse en indiquant clairement, dans chaque cas, le critère que vous utilisez.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$

C'est une série à valeurs **positives** de terme général $a_n = f(n)$ où $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$ est une fonction décroisante de x à valeurs positives pour $x \geq 0$. En posant

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \quad \text{et} \quad s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n+1)^3} \quad (\text{pour } k \geq 1),$$

le critère de l'intégrale donne

$$R_k = s - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \leq \int_k^{\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} \right|_k^t = \frac{1}{2(k+1)^2}.$$

On trouve

$$\frac{1}{2(k+1)^2} \leq 2^{-9} \iff 2(k+1)^2 \geq 2^9 \iff k+1 \geq 2^4 \iff k \geq 15.$$

Il suffit donc d'additionner 15 termes.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$

Solution: C'est une série **alternée** de terme général $a_n = (-1)^n b_n$ où $b_n = \dfrac{1}{(n+1)^3}$ est une fonction décroisante de n pour $n \geq 1$, avec $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Donc la série est convergente en vertu du test des séries alternées et, en posant

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3} \quad \text{et} \quad s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3} \quad (\text{pour } k \geq 1),$$

l'erreur d'approximation de s par s_k est

$$R_k = |s - s_k| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3} \right| \leq \frac{1}{(k+2)^3}.$$

On trouve

$$\frac{1}{(k+2)^3} \leq 2^{-9} \iff (k+2)^3 \geq 2^9 \iff k+2 \geq 2^3 \iff k \geq 6.$$

Il suffit donc d'additionner 6 termes.

6. [10 points] Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n\sqrt{n+4}}$.

Solution: Le terme général de cette série est $a_n = \dfrac{(x+2)^n}{3^n\sqrt{n+4}}$. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|x+2|^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+5}} \cdot \frac{3^n\sqrt{n+4}}{|x+2|^n} = \frac{|x+2|}{3}\frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+5}} = \frac{|x+2|}{3}\sqrt{\frac{n+4}{n+5}} \\ &= \frac{|x+2|}{3}\sqrt{\frac{1+4/n}{1+5/n}} \longrightarrow \frac{|x+2|}{3} \quad \text{si } n \to \infty.\end{aligned}$$

Donc en vertu du test du quotient,

- la série converge si $|x+2|/3 < 1 \iff |x+2| < 3 \iff x \in (-5, 1)$,
- elle diverge si $|x+2|/3 > 1 \iff |x+2| > 3 \iff x < -5$ ou $x > 1$.

Son rayon de convergence est $\boxed{R = 3}$.

Pour $x = -5$, la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n\sqrt{n+4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}.$$

C'est une série alternée de terme général $(-1)^n b_n$ avec $b_n = 1/\sqrt{n+4}$ décroissant pour $n \geq 1$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Donc elle est convergente en vertu du test des séries alternées.

Pour $x = 1$, la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n\sqrt{n+4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

car c'est une série de Riemann avec $p = 1/2 \leq 1$. Donc elle est divergente.

L'intervalle de convergence de la série est $[-5, 1)$.

7. [5 points] Donnez le développement en série entière autour de $x = 0$ de la fonction $\dfrac{1}{3x+2}$. Sur quel intervalle la série représente-t-elle la fonction?

Solution: On sait que

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \quad \text{si } |y| < 1.$$

La fonction qui nous intéresse est

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{1/2}{(3x/2)+1} = \frac{1/2}{1-(-3x/2)}.$$

Donc en appliquant la formule précédente avec $y = -3x/2$ on obtient

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{2^{n+1}}$$

si $|-3x/2| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < 2/3$. La série ci-dessus représente $\dfrac{1}{3x+2}$ pour x dans l'intervalle $(-2/3, 2/3)$.

8. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n}$.

(i) [4 points] Laquelle des séries ci-dessous est égale à $f'(1)$? Encerclez la lettre qui correspond à la bonne réponse.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}}$ (E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ $\boxed{F}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$

Solution: On vérifie facilement que le rayon de convergence de cette série est $R = 4$. En la dérivant termes à termes, on trouve

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{nx^n}{4^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{4^n},$$

pour tout x avec $|x| < 4$, donc

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (1)^{n-1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

La réponse est (F).

(ii) [4 points] Laquelle des séries ci-dessous est égale à $\int_0^{1/2} f(x)dx$? Encerclez la lettre qui correspond à la bonne réponse.

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)4^n}$ (B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{3n}}$ (C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)2^{3n}}$

(D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{3n+1}}$ (E) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}$ $\boxed{F}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{3n+1}}$

Solution: En intégrant termes à termes, on trouve

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{nx^n}{4^n} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)4^n},$$

où C désigne la constante d'intégration. Cette fonction est une primitive de f pour $|x| < 4$, c'est-à-dire sur l'intervalle $(-4, 4)$. Donc

$$\int_0^{1/2} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(1/2)^{n+1}}{(n+1)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{3n+1}}$$

La réponse est F.