MAT 1722 A. Hiver 2013. Mercredi 6 février. 8h30–9h50 Prof. Damien Roy

Examen de mi-session 1

NOM de famille: Solutions de la Version A

Prénom: ______________________________

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (Texas Instruments TI-30, TI-34 et Casio fx-260, fx-300) sont autorisées. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- Chaque problème requiert une solution complète et claire. Une partie importante des points est allouée au développement.
- L'examen comporte sept questions qui valent chacune entre 4 et 10 points, pour un total de 60 points, plus une huitième question bonus à 6 points.

1. (a) [4 pts] Pourquoi $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x^2-4}\,dx$ est-elle une intégrale impropre?
Si elle est convergente, calculez sa valeur. Sinon, justifiez pourquoi elle est divergente.

Solution. L'intégrale est impropre car la fonction $\dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$ n'est pas définie au point $x = 2$ de l'intervalle d'intégration $[0, 5]$. On a

$$\int_0^5 \frac{x}{x^2-4}dx = \int_0^2 \frac{x}{x^2-4}dx + \int_2^5 \frac{x}{x^2-4}dx$$

pourvu que les deux intégrales de droite convergent. En posant $u = x^2 - 4$, on trouve

$$\int \frac{x}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C.$$

Donc

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2-4}dx = \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{x}{x^2-4}dx = \lim_{t\to 2^-}\frac{1}{2}(\ln|t^2-4| - \ln(4)) = -\infty.$$

Comme cette intégrale est divergente, l'intégrale donnée est elle aussi divergente.

(b) [4 pts] Déterminez si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}+x^2}dx$ est convergente ou divergente en utilisant un test de comparaison approprié.

Solution. Pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x} \leq x^2$, donc

$$x^2 \leq 2\sqrt{x} + x^2 \leq 3x^2$$

puis

$$\frac{1}{3x^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

et par suite

$$\frac{1}{3} = \int_1^\infty \frac{dx}{3x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}+x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1.$$

En particulier l'intégrale est convergente et elle vaut au plus 1.

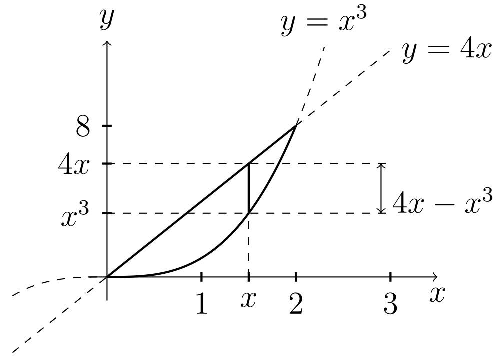
2. [10 pts] Soit $\mathcal{R}$ la région bornée du premier quadrant délimitée par les courbes

$$y = 4x \quad \text{et} \quad y = x^3 .$$

(a) Dessinez cette région et calculez son aire.

Solution. On détermine d'abord les points d'intersection des deux courbes en résolvant $4x = x^3$. On trouve $x = 0$ ou $4 = x^2$ donc $x = -2$, 0 ou 2. Comme on recherche des points du premier quadrant, on est réduit à $x = 0, 2$. Donc les points cherchés sont $(0, 0)$ et $(2, 8)$.
L'aire de cette région est

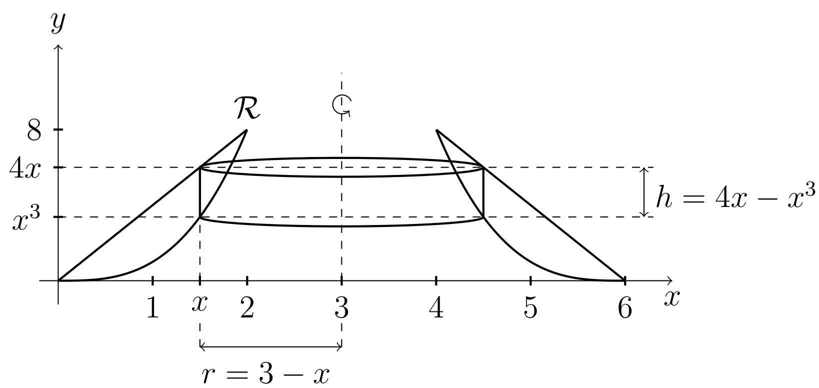
$$\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \boxed{4}.$$



(b) Calculez le volume du solide de révolution obtenu par rotation de cette région $\mathcal{R}$ autour de la droite verticale $x = 3$, et dessinez une couche typique qui intervient dans le calcul du volume (anneau ou cylindre) avec ses dimensions.

Solution. Le plus simple est d'utiliser la méthode des cylindres. Si on fait tourner autour de l'axe $x = 3$, la portion de région $\mathcal{R}$ comprise entre les abscisses x et $x + \Delta x$ pour Δx petit, on obtient un cylindre mince de rayon $r = 3-x$, de hauteur $h = 4x-x^3$ et d'épaisseur Δx (comme le montre la figure ci-dessous). Son volume est

$$\Delta V \cong 2\pi r h \Delta x = 2\pi(3 - x)(4x - x^3)\Delta x$$



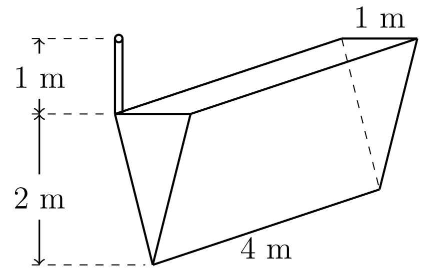
On en déduit que le volume total du solide est

$$V = \int_0^2 2\pi(3 - x)(4x - x^3)dx = 2\pi \int_0^2 (12x - 4x^2 - 3x^3 + x^4)dx$$
$$= 2\pi \left[6x^2 - (4/3)x^3 - (3/4)x^4 + (1/5)x^5\right|_0^2 = \frac{232\pi}{15} \cong 48.59.$$

3. [8 pts] Un réservoir a la forme d'un prisme droit à base triangulaire comme le montre la figure ci-contre.

Ses faces verticales sont des triangles isocèles de hauteur 2 m et de base 1 m, sa longueur est de 4 m, et il est plein d'eau.

On veut pomper toute son eau à 1 m au-dessus du réservoir.

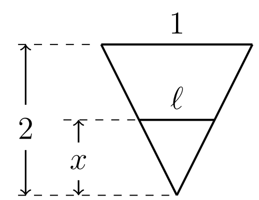


On note x la hauteur en mètres mesurée **à partir du fond du réservoir**.

(a) Quel est, en première approximation, le volume d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$.

Solution. Une section horizontale du réservoir à la hauteur x est un rectangle de longueur 4 et de largeur ℓ où ℓ est donné par la règle des triangles semblables (voir la figure ci-contre). On trouve

$$\frac{\ell}{x} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{x}{2}.$$



$$\Longrightarrow \quad \text{volume de la couche} \cong (\text{aire du rectangle}) \times \Delta x = 4\ell\Delta x = 2x\Delta x.$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail requis pour pomper cette mince couche d'eau à 1 m au-dessus du réservoir. On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3, et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est $g \cong 9.8$ m/s^2.

Solution. On doit monter la couche de $3 - x$ mètres. Le travail requis est donc

$$\begin{aligned} \text{Travail} &= (\text{poids}) \times (\text{distance}) \\ &= 1000g(\text{volume}) \times (\text{distance}) \\ &\cong 9800(2x\Delta x)(3 - x) = 19600x(3 - x)\Delta x \end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau du réservoir à 1 m au-dessus du réservoir.

Solution. Comme le réservoir est plein d'eau, on doit intégrer de $x = 0$ à $x = 2$:

$$W = \int_0^2 19600x(3 - x)dx = 19600 \int_0^2 (3x - x^2)dx = 19600 \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right|_0^2 \cong 65300 \text{ J}.$$

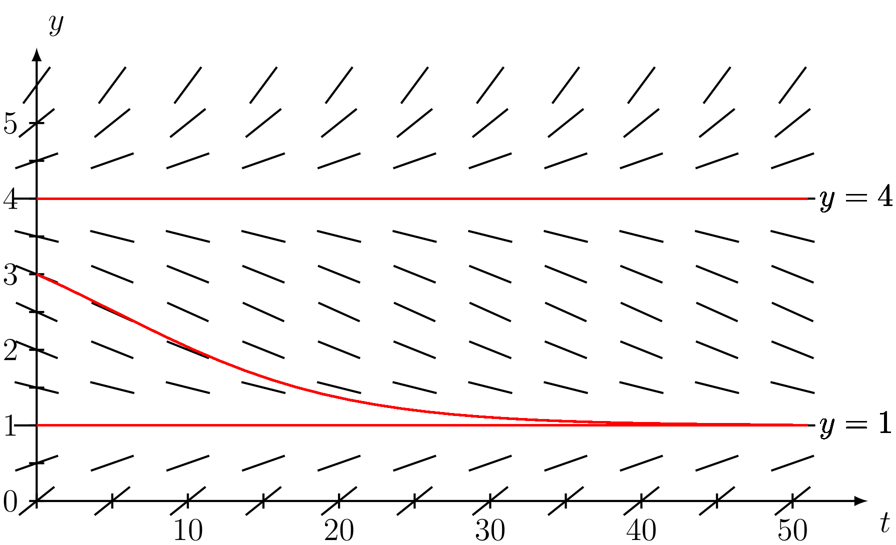
Les questions 4 et 5 sont à réponses brèves.

4. [4 points] On considère l'arc de courbe $x = t^2$, $y = e^{2t}$, $1 \le t \le 3$.
Écrivez l'intégrale qui donne la longueur de cet arc. Simplifiez la fonction à intégrer, *mais ne calculez pas cette intégrale.*

Réponse:

$$L = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_1^3 \sqrt{(2t)^2 + (2e^{2t})^2}\,dt = \int_1^3 \sqrt{4t^2 + 4e^{4t}}\,dt\,.$$

5. [4 points] Voici le champ de pentes d'une équation différentielle $\dfrac{dy}{dt} = F(t, y)$.



(a) Quelles sont ses solutions stationnaires (celles de la forme $y = C$)?

Réponse: $y = 1$ et $y = 4$

(b) Dessinez de votre mieux, sur le champ de pentes, le graphe de la solution particulière avec $y(0) = 3$, et encerclez parmi les valeurs ci-dessous, celle qui est égale à $y(20)$.

Choix de réponses: (A) 0.8 $\boxed{\text{(B) 1.3}}$ (C) 2.2 (D) 3 (E) 4.5

6. [8 pts] Paul se fait une tasse de lait au chocolat chaud avec de l'eau bouillante (à 100 °C), puis il la sort dehors pour la refroidir. Dehors il fait $-15\,°\mathrm{C}$, et 3 minutes plus tard, quand il rentre la tasse, sa température est de $40\,°\mathrm{C}$.

(a) Soit $T(t)$ la température de la tasse t minutes après que Paul l'ait placée dehors. En supposant que cette température obéisse à la loi du refroidissement de Newton, donnez l'équation différentielle que satisfait T, puis résolvez-la.

Solution. Suivant la loi du refroidissement de Newton, on a

$$\frac{dT}{dt} = k(T - (-15)) = k(T + 15)$$

où k est une constante. On en déduit

$$\begin{aligned}
\int \frac{dT}{T+15} = \int k dt \quad &\Longrightarrow \quad \ln|T+15| = kt + C \\
&\Longrightarrow \quad T + 15 = Ae^{kt} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = -15 + Ae^{kt}}
\end{aligned}$$

où $A = \pm e^C$ est une constante. Comme $T(0) = 100$, on a

$$100 = -15 + A \quad \Longrightarrow \quad A = 115 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T(t) = -15 + 115e^{kt}}.$$

On a aussi $T(3) = 40$, donc

$$\begin{aligned}
40 = -15 + 115e^{3k} \quad &\Longrightarrow \quad e^{3k} = \frac{55}{115} = \frac{11}{23} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{3}\ln(11/23) \cong -0.2459 \\
&\Longrightarrow \quad \boxed{T(t) \cong -15 + 115e^{-0.2459t}}.
\end{aligned}$$

(b) Si Paul avait laissé sa tasse dehors, après combien de temps aurait-elle commencé à geler? (On supposera que le lait au chocolat gèle à $0\,°\mathrm{C}$.)

Solution. On cherche le temps t pour lequel $T(t) = 0$. On doit donc résoudre

$$\begin{aligned}
0 = -15 + 115e^{-0.2459t} \quad &\Longrightarrow \quad e^{-0.2459t} = \frac{15}{115} = \frac{3}{23} \\
&\Longrightarrow \quad t = \frac{\ln(3/23)}{-0.2459} \cong \boxed{8.28 \text{ min.}}
\end{aligned}$$

7. [8 pts] Résoudre le problème à valeur initiale $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2t\cos(2t)}{y}\,, \quad y(0) = 2\,.$
Exprimez la solution y en fonction de t.

Solution: En séparant les variables, on trouve

$$\int y\,dy = \int 2t\cos(2t)\,dt$$

Pour intégrer le membre de droite, on procède par parties en choisissant $u = 2t$ et $dv = \cos(2t)dt$ de sorte que $du = 2dt$ et $v = (1/2)\sin(2t)$. Cela donne

$$\begin{aligned}\int 2t\cos(2t)\,dt &= (2t)(1/2)\sin(2t) - \int (1/2)\sin(2t)2\,dt\\ &= t\sin(2t) - \int \sin(2t)\,dt = t\sin(2t) + (1/2)\cos(2t) + C\end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\frac{y^2}{2} = t\sin(2t) + (1/2)\cos(2t) + C \quad\Longrightarrow\quad y = \pm\sqrt{2t\sin(2t) + \cos(2t) + 2C}.$$

Comme $y(0) = 2$, on en déduit $2 = \pm\sqrt{1+2C}$, donc $2C = 3$ et

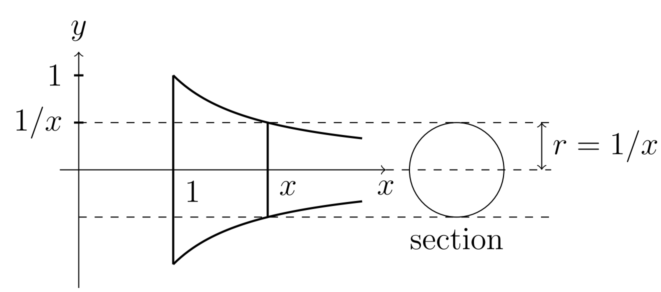
$$\boxed{y = \sqrt{2t\sin(2t) + \cos(2t) + 3}}$$

avec le signe $+$ car $y(0) > 0$.

8. [6 pts **bonus**] Soit $\mathcal{R}$ la région du plan définie par $1 \le x < \infty$ et $0 \le y \le \dfrac{1}{x}$.
Quel est le volume du solide de révolution obtenu par rotation de $\mathcal{R}$ autour de l'axe des x ? (Cette figure, appelée "trompette de Gabriel" a été inventée par Toricelli, physicien et mathématicien du 17-ième sciècle à qui on doit aussi le baromètre.)

Solution. La section du solide par le plan des points d'abscisse x est un disque de rayon $r = 1/x$ comme le montre le dessin ci-contre. Son aire est $A(x) = \pi r^2 = \pi/x^2$, donc le volume du solide est

$$\begin{aligned}V &= \int_1^\infty \frac{\pi}{x^2}\,dx = \pi \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx\\ &= \pi\lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right|_1^t = \pi\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t} + 1\right)\\ &= \pi.\end{aligned}$$



(On peut aussi invoquer le résultat $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ si $p > 1$, en prenant $p = 2$.)

MAT 1722 A Hiver 2012 Mercredi 8 février, 8h30–9h50 Prof. Damien Roy

Examen de mi-session 1

NOM de famille: SOLUTIONS DE LA VERSION B

Prénom: ______________________________

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (Texas Instruments TI-30, TI-34 et Casio fx-260, fx-300) sont autorisées. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- Chaque problème requiert une solution complète et claire. Une partie importante des points est allouée au développement.
- L'examen comporte sept questions qui valent chacune entre 4 et 10 points, pour un total de 60 points, plus une huitième question bonus à 6 points.

1. (a) [4 pts] Pourquoi $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x^2-9}\,dx$ est-elle une intégrale impropre?
Si elle est convergente, calculez sa valeur. Sinon, justifiez pourquoi elle est divergente.

Solution. L'intégrale est impropre car la fonction $\displaystyle\frac{x}{x^2-9} = \frac{x}{(x-3)(x+3)}$ n'est pas définie au point $x = 3$ de l'intervalle d'intégration $[0, 5]$. On a

$$\int_0^5 \frac{x}{x^2-9}dx = \int_0^3 \frac{x}{x^2-9}dx + \int_3^5 \frac{x}{x^2-9}dx$$

pourvu que les deux intégrales de droite convergent. En posant $u = x^2 - 9$, on trouve

$$\int \frac{x}{x^2-9}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-9| + C.$$

Donc

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2-9}dx = \lim_{t\to 3^-}\int_0^t \frac{x}{x^2-9}dx = \lim_{t\to 3^-}\frac{1}{2}(\ln|t^2-9| - \ln(9)) = -\infty.$$

Comme cette intégrale est divergente, l'intégrale donnée est elle aussi divergente.

(b) [4 pts] Déterminez si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+3x^2}$ est convergente ou divergente en utilisant un test de comparaison approprié.

Solution. Pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x} \leq x^2$, donc

$$3x^2 \leq \sqrt{x} + 3x^2 \leq 4x^2$$

puis

$$\frac{1}{4x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+3x^2} \leq \frac{1}{3x^2}$$

et par suite

$$\frac{1}{4} = \int_1^\infty \frac{dx}{4x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+3x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

En particulier l'intégrale est convergente et elle vaut au plus 1/3.

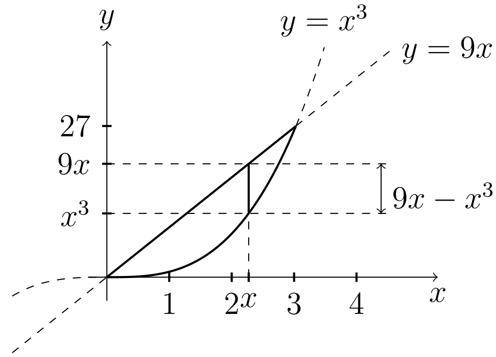
2. [10 pts] Soit $\mathcal{R}$ la région bornée du premier quadrant délimitée par les courbes

$$y = 9x \quad \text{et} \quad y = x^3 .$$

(a) Dessinez cette région et calculez son aire.

Solution. On détermine d'abord les points d'intersection des deux courbes en résolvant $9x = x^3$. On trouve $x = 0$ ou $9 = x^2$ donc $x = -3$, 0 ou 3. Comme on recherche des points du premier quadrant, on est réduit à $x = 0, 3$. Donc les points cherchés sont $(0, 0)$ et $(3, 27)$.
L'aire de cette région est

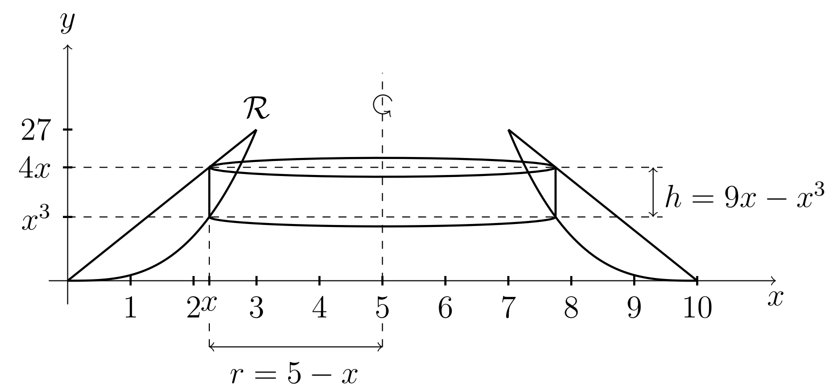
$$\int_0^3 (9x - x^3)\, dx = \left[\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_0^3 = \boxed{\frac{81}{4}}.$$



(b) Calculez le volume du solide de révolution obtenu par rotation de cette région $\mathcal{R}$ autour de la droite verticale $x = 5$, et dessinez une couche typique qui intervient dans le calcul du volume (anneau ou cylindre) avec ses dimensions.

Solution. Le plus simple est d'utiliser la méthode des cylindres. Si on fait tourner autour de l'axe $x = 5$, la portion de région $\mathcal{R}$ comprise entre les abscisses x et $x + \Delta x$ pour Δx petit, on obtient un cylindre mince de rayon $r = 5 - x$, de hauteur $h = 9x - x^3$ et d'épaisseur Δx (comme le montre la figure ci-dessous). Son volume est

$$\Delta V \cong 2\pi r h \Delta x = 2\pi(5 - x)(9x - x^3)\Delta x$$



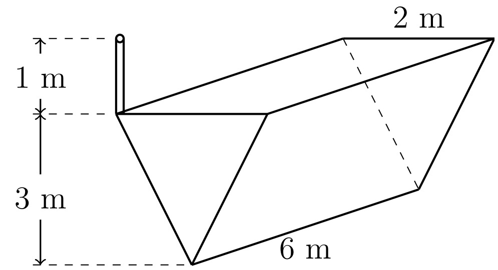
On en déduit que le volume total du solide est

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 2\pi(5 - x)(9x - x^3)dx = 2\pi \int_0^3 (45x - 9x^2 - 5x^3 + x^4)dx \\ &= 2\pi \left[(45/2)x^2 - 3x^3 - (5/4)x^4 + (1/5)x^5 \right|_0^3 = \frac{1377\pi}{10} \cong 432.6 . \end{aligned}$$

3. [8 pts] Un réservoir a la forme d'un prisme droit à base triangulaire comme le montre la figure ci-contre.

Ses faces verticales sont des triangles isocèles de hauteur 3 m et de base 2 m, sa longueur est de 6 m, et il est plein d'eau.

On veut pomper toute son eau à 1 m au-dessus du réservoir.

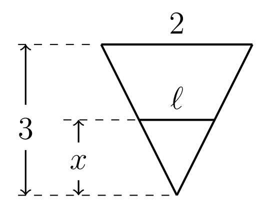


On note x la hauteur en mètres mesurée **à partir du fond du réservoir**.

(a) Quel est, en première approximation, le volume d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$.

Solution. Une section horizontale du réservoir à la hauteur x est un rectangle de longueur 4 et de largeur ℓ où ℓ est donné par la règle des triangles semblables (voir la figure ci-contre). On trouve

$$\frac{\ell}{x} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{2x}{3}.$$



$$\Longrightarrow \quad \text{volume de la couche} \cong (\text{aire du rectangle}) \times \Delta x = 6\ell\Delta x = 4x\Delta x.$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail requis pour pomper cette mince couche d'eau à 1 m au-dessus du réservoir. On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3, et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est $g \cong 9.8$ m/s^2.

Solution. On doit monter la couche de $4 - x$ mètres. Le travail requis est donc

$$\begin{aligned} \text{Travail} &= (\text{poids}) \times (\text{distance}) \\ &= 1000g(\text{volume}) \times (\text{distance}) \\ &\cong 9800(4x\Delta x)(4 - x) = 39200x(4 - x)\Delta x \end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau du réservoir à 1 m au-dessus du réservoir.

Solution. Comme le réservoir est plein d'eau, on doit intégrer de $x = 0$ à $x = 3$:

$$W = \int_0^3 39200x(4 - x)dx = 39200 \int_0^3 (4x - x^2)dx = 39200 \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right|_0^3 \cong 352800 \text{ J}.$$

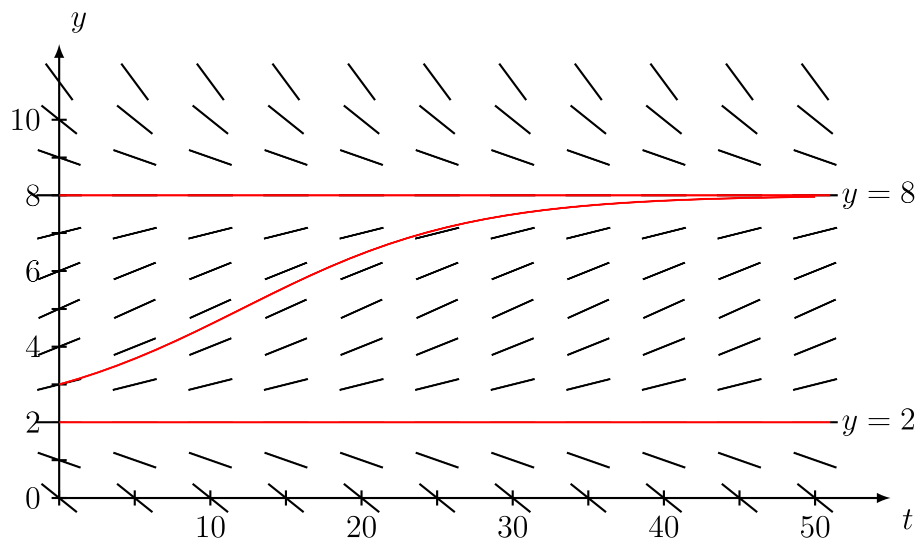
Les questions 4 et 5 sont à réponses brèves.

4. [4 points] On considère l'arc de courbe $x = t^2\,,\ \ y = e^{3t}\,,\quad 1 \le t \le 4.$
Écrivez l'intégrale qui donne la longueur de cet arc. Simplifiez la fonction à intégrer, *mais ne calculez pas cette intégrale.*

Réponse:

$$L = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_1^4 \sqrt{(2t)^2 + (3e^{3t})^2}\,dt = \int_1^4 \sqrt{4t^2 + 9e^{6t}}\,dt\,.$$

5. [4 points] Voici le champ de pentes d'une équation différentielle $\dfrac{dy}{dt} = F(t, y)$.



(a) Quelles sont ses solutions stationnaires (celles de la forme $y = C$)?

Réponse: $y = 2$ et $y = 8$

(b) Dessinez de votre mieux, sur le champ de pentes, le graphe de la solution particulière avec $y(0) = 3$, et encerclez parmi les valeurs ci-dessous, celle qui est égale à $y(20)$.

Choix de réponses: (A) 0.8 (B) 1.8 (C) 2.2 (D) 4 $\boxed{\text{(E) 6.2}}$

NOTE: Par erreur, la partie (b) demandait $y(0) = 0$ au lieu de $y(0) = 3$, ce qui ne conduisait à aucun choix de réponses parmi (A) – (E). J'ai donné le point à tout ceux qui avaient cette version de l'examen quel que soit leur réponse (A) – (E). Par contre, quand le graphe de leur solution ne correspondait pas à la condition $y(0) = 0$, j'ai dessiné en rouge le graphe correct sur la copie d'examen.

6. [8 pts] Paul se fait une tasse de lait au chocolat chaud avec de l'eau bouillante (à 100 °C), puis il la sort dehors pour la refroidir. Dehors il fait $-20\,°\mathrm{C}$, et 3 minutes plus tard, quand il rentre la tasse, sa température est de $60\,°\mathrm{C}$.

(a) Soit $T(t)$ la température de la tasse t minutes après que Paul l'ait placée dehors. En supposant que cette température obéisse à la loi du refroidissement de Newton, donnez l'équation différentielle que satisfait T, puis résolvez-la.

Solution. Suivant la loi du refroidissement de Newton, on a

$$\frac{dT}{dt} = k(T-(-20)) = k(T+20)$$

où k est une constante. On en déduit

$$\begin{aligned}\int \frac{dT}{T+20} = \int k dt \quad &\Longrightarrow \quad \ln|T+20| = kt + C \\ &\Longrightarrow \quad T+20 = Ae^{kt} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = -20 + Ae^{kt}}\end{aligned}$$

où $A = \pm e^{C}$ est une constante. Comme $T(0) = 100$, on a

$$100 = -20 + A \quad \Longrightarrow \quad A = 120 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T(t) = -20 + 120e^{kt}}.$$

On a aussi $T(3) = 60$, donc

$$\begin{aligned}60 = -20 + 120e^{3k} \quad &\Longrightarrow \quad e^{3k} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{3}\ln(2/3) \cong -0.1352 \\ &\Longrightarrow \quad \boxed{T(t) \cong -20 + 120e^{-0.1352t}}.\end{aligned}$$

(b) Si Paul avait laissé sa tasse dehors, après combien de temps aurait-elle commencé à geler? (On supposera que le lait au chocolat gèle à $0\,°\mathrm{C}$.)

Solution. On cherche le temps t pour lequel $T(t) = 0$. On doit donc résoudre

$$\begin{aligned}0 = -20 + 120e^{-0.1352t} \quad &\Longrightarrow \quad e^{-0.1352t} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \\ &\Longrightarrow \quad t = \frac{\ln(1/6)}{-0.1352} \cong \boxed{13.25 \text{ min.}}\end{aligned}$$

7. [8 pts] Résoudre le problème à valeur initiale $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4t\cos(2t)}{y}$, $y(0) = 3$.
Exprimez la solution y en fonction de t.

Solution: En séparant les variables, on trouve

$$\int y\,dy = \int 4t\cos(2t)\,dt$$

Pour intégrer le membre de droite, on procède par parties en choisissant $u = 4t$ et $dv = \cos(2t)dt$ de sorte que $du = 4dt$ et $v = (1/2)\sin(2t)$. Cela donne

$$\begin{aligned}\int 4t\cos(2t)\,dt &= (4t)(1/2)\sin(2t) - \int (1/2)\sin(2t)4\,dt \\ &= 2t\sin(2t) - \int 2\sin(2t)\,dt = 2t\sin(2t) + \cos(2t) + C\end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\frac{y^2}{2} = 2t\sin(2t) + \cos(2t) + C \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{4t\sin(2t) + 2\cos(2t) + 2C}.$$

Comme $y(0) = 3$, on en déduit $3 = \pm\sqrt{2 + 2C}$, donc $2C = 7$ et

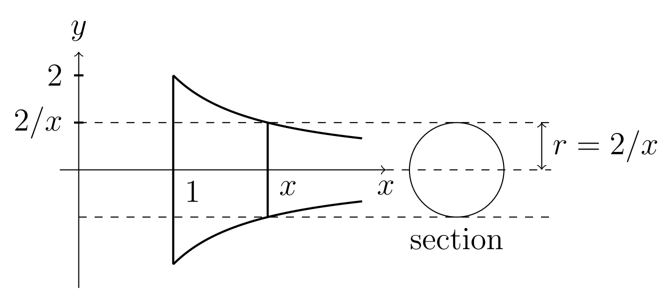
$$\boxed{y = \sqrt{4t\sin(2t) + 2\cos(2t) + 7}}$$

avec le signe + car $y(0) > 0$.

8. [6 pts **bonus**] Soit $\mathcal{R}$ la région du plan définie par $1 \le x < \infty$ et $0 \le y \le \dfrac{2}{x}$.
Quel est le volume du solide de révolution obtenu par rotation de $\mathcal{R}$ autour de l'axe des x ? (Cette figure, appelée "trompette de Gabriel" a été inventée par Toricelli, physicien et mathématicien du 17-ième sciècle à qui on doit aussi le baromètre.)

Solution. La section du solide par le plan des points d'abscisse x est un disque de rayon $r = 2/x$ comme le montre le dessin ci-contre. Son aire est $A(x) = \pi r^2 = 4\pi/x^2$, donc le volume du solide est

$$\begin{aligned}V &= \int_1^\infty \frac{4\pi}{x^2}\,dx = 4\pi \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= 4\pi \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right|_1^t = 4\pi \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-1}{t} + 1\right) \\ &= 4\pi.\end{aligned}$$



(On peut aussi invoquer le résultat $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ si $p > 1$, en prenant $p = 2$.)