

Chapitre 4 : Réflexion et réfraction de la lumière

Exercices

E1. On veut démontrer que lorsqu'on tourne un miroir M d'un angle θ , le rayon réfléchi est dévié d'un angle 2θ . Pour y arriver, on dessine le trajet d'un rayon lumineux provenant d'une direction fixe avant (1) et après (2) que le miroir ait subi une rotation d'un angle θ . Dans les deux figures, on fait appel à la loi de la réflexion et à l'équation 4.1 du manuel pour fixer la direction dans laquelle repart le rayon lumineux :



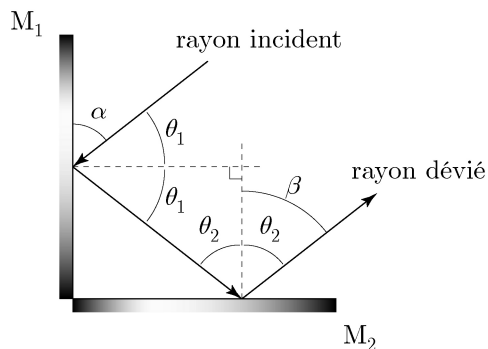
On note que le rayon réfléchi subit une déviation correspondant à $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$. Pour calculer cette déviation on rappelle que, dans la première figure, $\beta_1 = 2\alpha_1$. De plus, si on compare les deux figures, on observe que $\alpha_2 = \alpha_1 - \theta$, ce qui permet d'établir une valeur pour β_2 :

$$\beta_2 = 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \theta) = 2\alpha_1 - 2\theta = \beta_1 - 2\theta$$

Et alors,

$$\beta_1 - \beta_2 = 2\theta \implies \boxed{\Delta\beta = 2\theta} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

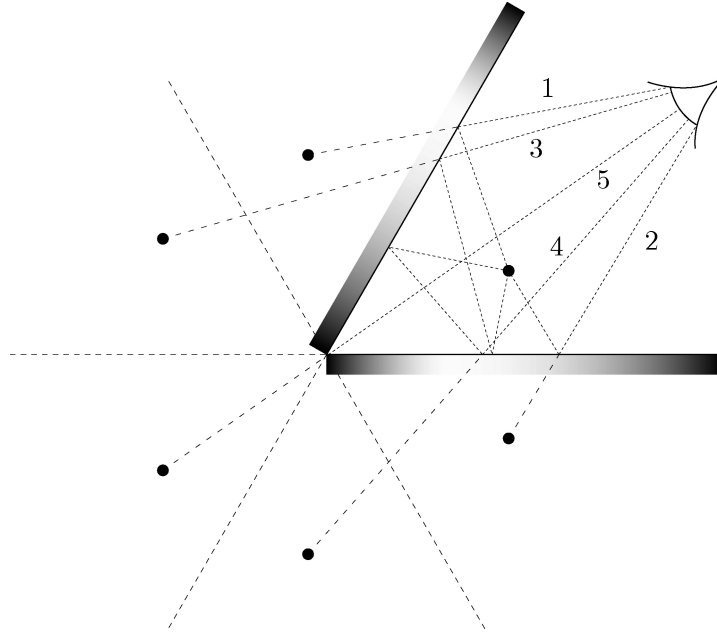
E2. Soit le montage suivant, composé de deux miroirs M_1 et M_2 disposés perpendiculairement :



Afin d'établir que les rayons incident et dévié sont parallèles et de sens opposés, on doit démontrer que $\alpha = \beta$. Comme

$$\beta = \theta_2 = 180^\circ - 90^\circ - \theta_1 = 90^\circ - \theta_1 \implies \boxed{\beta = \alpha} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

E3. Deux des tracés sont obtenus par réflexion directe (1, 2), deux autres par réflexion sur les deux miroirs (3, 4) et le dernier par une triple réflexion (5). Dans ce dernier cas, les trois réflexions sont rapprochées et il est impossible de les dessiner correctement :



E4. Pour trouver de quel angle θ s'écartent les rayons incidents, on fait varier l'angle ϕ entre les deux miroirs auxquels sont équivalents les côtés du prisme. On pose d'abord que $\phi = 0^\circ$, de sorte que les rayons incidents effleurent les miroirs sans être déviés de la verticale ($\theta = 0^\circ$). Selon l'exercice 1, lorsque l'un des miroirs est ensuite tourné d'un angle $\frac{\phi}{2} > 0^\circ$, le rayon réfléchi est dévié du double, soit ϕ . Puisque les côtés du prisme sont disposés symétriquement de part et d'autre de la verticale, chacun étant tourné de $\frac{\phi}{2}$, les rayons incidents s'écartent donc, après les réflexions, d'un angle $\boxed{\theta = 2\phi} \implies \boxed{\text{CQFD}}$

E5. On considère trois miroirs perpendiculaires deux à deux, ce qui constitue la cellule élémentaire d'un *cataphote*. On choisit un système d'axes tel que les miroirs sont disposés selon les plans xy , xz et yz . Un rayon lumineux incident de direction quelconque est décrit par $\vec{\mathbf{r}}_i = a \vec{\mathbf{i}} + b \vec{\mathbf{j}} + c \vec{\mathbf{k}}$.

Quand ce rayon atteint le premier miroir et s'y réfléchit, l'une des composantes de sa direction est perpendiculaire au plan du miroir et change de signe à cause du changement dans la direction de propagation de la lumière. Les deux autres composantes changent de signe à cause de la réflexion. Comme le rayon lumineux se réfléchit sur les trois miroirs, le chan-

gement de signe a lieu trois fois. De sorte qu'après trois réflexions, la direction du rayon réfléchi devient $\vec{r}_f = -a \vec{i} - b \vec{j} - c \vec{k}$, ce qui implique que $\boxed{\vec{r}_i = -\vec{r}_f} \implies \boxed{\text{CQFD}}$

- E6.** (a) Au moyen de l'équation 4.4, on établit le rapport entre les deux longueurs d'onde et les deux valeurs d'indice, ce qui donne

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{\lambda_0}{n_1}}{\frac{\lambda_0}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1} \implies n_2 = \frac{n_1 \lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1,33(450 \times 10^{-9})}{(400 \times 10^{-9})} = \boxed{1,50}$$

- (b) Avec l'équation 4.2, on obtient

$$n_2 = \frac{c}{v_2} \implies v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \times 10^8}{1,50} = \boxed{2,00 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

- E7.** On calcule l'angle d'incidence θ_1 avec l'équation 4.3 :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \implies \theta_1 = \arcsin \left(\frac{n_2 \sin \theta_2}{n_1} \right) = \arcsin \left(\frac{1,4 \sin(32^\circ)}{1} \right) = 47,9^\circ$$

Comme on peut s'en rendre compte en combinant les figures 4.5 et 4.11 du manuel, l'angle β entre les rayons réfléchi et réfracté correspond à

$$\beta = (90^\circ - \theta'_1) + (90^\circ - \theta_2) = (90^\circ - \theta_1) + (90^\circ - \theta_2) \implies \beta = 180^\circ - \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{i})$$

Si on insère les valeurs d'angle, on obtient

$$\beta = 180^\circ - 47,9^\circ - 32^\circ = \boxed{100^\circ}$$

- E8.** L'équation (i) de l'exercice 7 établit un lien entre l'angle de déviation β , l'angle d'incidence θ_1 et l'angle de réfraction θ_2 . Pour $\beta = 90^\circ$, cette équation donne

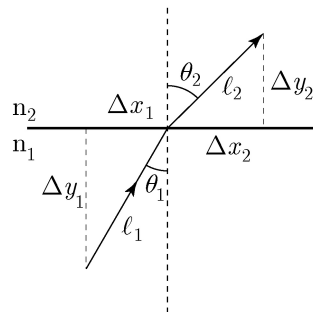
$$90^\circ = 180^\circ - \theta_1 - \theta_2 \implies \theta_2 = 90^\circ - \theta_1$$

Avec l'équation 4.3 et l'identité trigonométrique $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$, on obtient

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin(90^\circ - \theta_1) = n_2 \cos \theta_1 \implies \tan \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,52}{1} \implies$$

$$\theta_1 = \boxed{56,7^\circ}$$

- E9.** La figure qui suit montre le trajet du rayon lumineux entre sa source et l'observateur qui se trouve dans la barque :



La distance parcourue dans l'eau par le rayon incident à $\theta_1 = 30^\circ$ est ℓ_1 et elle dépend de la profondeur, $\Delta y_1 = 3 \text{ m}$. Comme $\ell_1 = \frac{\Delta y_1}{\cos \theta_1}$, on calcule la première contribution Δx_1 à

la distance horizontale qui sépare la source de l'observateur :

$$\Delta x_1 = \ell_1 \sin \theta_1 = \left(\frac{\Delta y_1}{\cos \theta_1} \right) \sin \theta_1 = \Delta y_1 \tan \theta_1 = 3 \tan(30^\circ) = 1,73 \text{ m}$$

On calcule l'angle de réfraction θ_2 avec l'équation 4.3 :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \implies \theta_2 = \arcsin \left(\frac{n_1 \sin \theta_1}{n_2} \right) = \arcsin \left(\frac{1,33 \sin(30^\circ)}{1} \right) = 41,7^\circ$$

La deuxième contribution Δx_2 à la distance horizontale se calcule de la même manière que Δx_1 :

$$\Delta x_2 = \Delta y_2 \tan \theta_2 = (1) \tan(41,7^\circ) = 0,89 \text{ m}$$

Finalement, la distance horizontale totale est

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1,73 + 0,89 = \boxed{2,62 \text{ m}}$$

- E10.** Dans le logiciel Maple, on crée un ensemble pour le sinus des valeurs d'angles fournies. Cet ensemble de valeurs $(\sin r, \sin i)$ est ensuite porté en graphique :

```
> restart;
> data:=[[.139, .173], [.267, .342], [.382, .500], [.484, .642], [.573, .766], [.649, .866],
        [.713, .939], [.766, .984]];
> with(plots):
> pointplot(data);
```

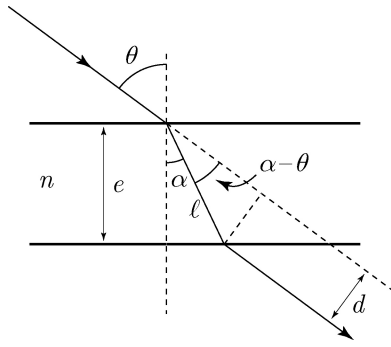
Le graphe montre un alignement des points selon une droite. Au moyen de l'équation 4.3, on constate que $\sin i = n_{\text{eau}} \sin r$. La pente de la droite correspond donc à l'indice de réfraction de l'eau. Pour obtenir la pente de cette droite, on charge la librairie "CurveFitting" et on lance la commande qui permet d'effectuer une régression linéaire des données :

```
> with(CurveFitting):
> LeastSquares(data, x);
```

Selon ces résultats, l'indice de réfraction de l'eau possède une valeur approximative de

$$\boxed{\approx 1,32}.$$

- E11.** Un rayon incident à angle θ sur une plaque de verre est dévié latéralement d'une distance d . On reprend la figure 4.57 du manuel et on y ajoute quelques détails :



Selon la figure, $\ell = \frac{e}{\cos \alpha}$, que l'on insère dans

$$d = \ell \sin(\theta - \alpha) \implies \boxed{d = \frac{e \sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

E12. On insère les données de l'énoncé dans l'équation 4.5 et on trouve

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies n_i = \frac{n_a}{\sin \theta_c} = \frac{1,33}{\sin(68^\circ)} = 1,43$$

Avec l'équation 4.2, on obtient

$$n_i = \frac{c}{v_i} \implies v_i = \frac{c}{n_i} = \frac{3 \times 10^8}{1,43} = \boxed{2,10 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

E13. On insère les données de l'énoncé dans l'équation 4.5 et on trouve

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_a}{n_i}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,33}\right) = 48,8^\circ$$

Si la profondeur est de $\Delta y = 2 \text{ m}$, le rayon r du cercle qui délimite la zone sans réflexion totale interne est déterminé par la composante Δx du trajet lumineux projeté à la surface de l'eau. Si on utilise la portion de la figure de la solution de l'exercice 9 qui montre le trajet sous l'eau, on note que

$$\tan \theta_c = \frac{\Delta x}{\Delta y} \implies r = \Delta x = \Delta y \tan \theta_c = 2 \tan(48,8^\circ) = \boxed{2,28 \text{ m}}$$

E14. (a) Si l'indice de réfraction du milieu inconnu est supérieur à celui de l'hémisphère transparent ($n_2 > n_1$), tout rayon lumineux, quelle que soit la valeur de θ , sera réfléchi et réfracté à l'interface entre les deux milieux. Il n'existe alors aucune manière simple de déterminer n_2 , il faut procéder à la mesure des angles d'incidence *et* de réfraction.

Toutefois, si $\boxed{n_2 < n_1}$, la situation est différente. Lorsqu'un rayon se propageant selon l'axe de l'hémisphère ($\theta = 0^\circ$) arrive à l'interface, il est réfléchi et réfracté. Pour toute valeur non-nulle de θ , l'angle du rayon réfracté sera toujours supérieur à θ . En augmentant la valeur de θ , on atteint la situation critique pour laquelle il se produit réflexion totale interne. Ainsi, la valeur de n_2 peut être obtenue lorsqu'on observe ce phénomène en ne mesurant que la valeur de l'angle d'incidence θ .

(b) Si la situation décrite au paragraphe précédent se produit, on a $\boxed{\theta = \theta_c}$. Dans l'équation

4.5, $n_i = n_1$ et $n_a = n_2$, de sorte que

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies \boxed{n_2 = n_1 \sin \theta}$$

E15. On insère les données dans l'équation 4.5, ce qui donne l'angle critique pour l'interface entre la fibre et l'air :

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_a}{n_i}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 41,8^\circ$$

On considère l'angle d'incidence le plus élevé à l'entrée dans la fibre, soit $\theta_1 = 90^\circ$. On calcule l'angle du rayon réfracté au moyen de l'équation 4.3 :

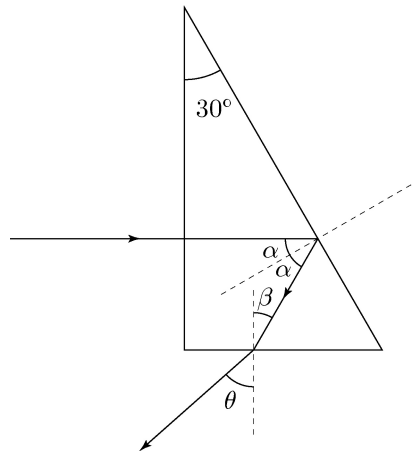
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \implies \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin \theta_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{1 \sin(90^\circ)}{1,5}\right) = 41,8^\circ$$

Sur la paroi de la fibre, le rayon fera un angle $\theta = 90^\circ - \theta_2 = 90^\circ - 41,8^\circ = 48,2^\circ$.

Comme $\theta > \theta_c$ pour ce cas et pour toute autre valeur de θ_1 , on conclut qu'il y aura

$$\boxed{\text{réflexion totale interne pour toutes les valeurs d'angle d'incidence } \theta_1} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

E16. On reprend la figure 4.60 du manuel et on y dessine le trajet du rayon lumineux jusqu'à sa sortie, sur la face inférieure :



La géométrie de la figure permet d'affirmer que $\beta = \alpha = 30^\circ$. On calcule ensuite l'angle du rayon lumineux à la sortie au moyen de l'équation 4.3 :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \implies (1,5) \sin \alpha = \sin \beta \implies$$

$$\beta = \arcsin((1,5) \sin(30^\circ)) = \boxed{48,6^\circ \text{ par rapport à la verticale}}$$

E17. Pour un prisme dont l'angle au sommet est de $\phi = 60^\circ$, l'angle minimal de déviation est de $\delta_{\min} = 41^\circ$. On calcule l'indice de réfraction du prisme au moyen de l'équation obtenue à l'exemple 4.7 du manuel, ce qui donne

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\phi + \delta_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{60^\circ + 41^\circ}{2}\right)}{\sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right)} = 1,54$$

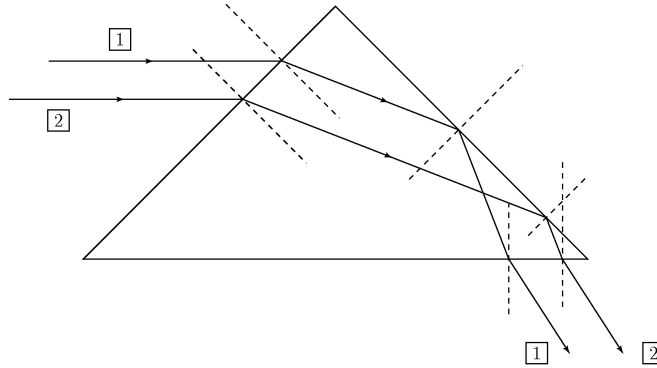
Avec l'équation 4.2, on obtient

$$n = \frac{c}{v} \implies v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8}{1,54} = \boxed{1,94 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

E18. L'équation 4.3 appliquée à l'interface gauche du prisme de la figure 4.29 du manuel permet d'écrire que $n_{\text{eau}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r$. Toutefois, comme on traite le cas de la déviation minimale, on montre à l'exemple 4.7 que $i = \frac{\delta_{\text{min}}}{2} + r$ et que $r = \frac{\phi}{2}$. Dès lors, avec $\phi = 60^\circ$, l'équation 4.3 s'écrit

$$\begin{aligned} n_{\text{eau}} \sin \left(\frac{\delta_{\text{min}} + \phi}{2} \right) &= n_{\text{prisme}} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \implies \sin \left(\frac{\delta_{\text{min}} + \phi}{2} \right) = \frac{n_{\text{prisme}}}{n_{\text{eau}}} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \implies \\ \frac{\delta_{\text{min}} + \phi}{2} &= \arcsin \left(\frac{n_{\text{prisme}}}{n_{\text{eau}}} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right) \implies \\ \delta_{\text{min}} &= 2 \arcsin \left(\frac{n_{\text{prisme}}}{n_{\text{eau}}} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right) - \phi = 2 \arcsin \left(\frac{1,6}{1,33} (0,5) \right) - 60^\circ = \boxed{14,0^\circ} \end{aligned}$$

E19. On reprend la figure 4.61 du manuel et on y dessine le trajet des rayons lumineux après qu'ils ont pénétré dans le prisme, ce qui donne



Les rayons sont intervertis, le montage peut donc servir à inverser une image.

E20. On calcule le pouvoir dispersif P_d à partir de l'équation de la donnée :

$$P_d = \frac{n_B - n_R}{n_J - 1} = \frac{1,633 - 1,611}{1,620 - 1} = \boxed{0,0355}$$

E21. On constate, à la figure 4.62 du manuel, que le rayon lumineux frappe les deux parois intérieures du prisme à un angle de 45° .

(a) On trouve la valeur minimale de l'indice de réfraction du prisme en posant que $\theta_c = 45^\circ$ dans l'équation 4.5, où $n_a = 1$:

$$n_i \sin \theta_c = n_a \implies n_i = \frac{n_a}{\sin \theta_c} = \frac{1}{\sin(45^\circ)} = \boxed{1,41}$$

(b) On reprend le même calcul avec $n_a = 1,33$:

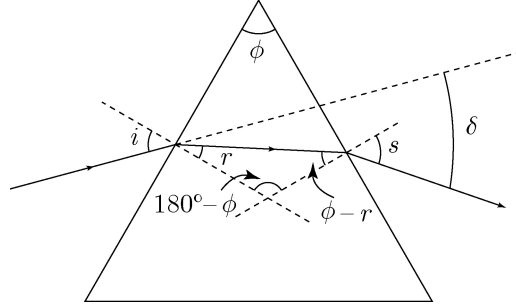
$$n_i = \frac{n_a}{\sin \theta_c} = \frac{1,33}{\sin(45^\circ)} = \boxed{1,88}$$

E22. L'équation 4.3 appliquée à l'interface gauche du prisme de la figure 4.29 du manuel permet d'écrire que $n_{\text{eau}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r$. Toutefois, comme on traite le cas de la déviation minimale, on montre à l'exemple 4.7 que $r = \frac{\phi}{2}$. Dès lors, avec $\phi = 60^\circ$, l'équation 4.3 s'écrit

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r \implies \sin i = n_{\text{prisme}} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \implies i = \arcsin \left(n_{\text{prisme}} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right) \implies$$

$$i = \arcsin \left((1,6) \sin (30^\circ) \right) = \boxed{53,1^\circ}$$

E23. La figure qui suit définit les angles et montre le trajet du rayon lumineux à travers le prisme :



Avec $i = 45^\circ$, on calcule l'angle de réfraction r sur la première face au moyen de l'équation 4.3 :

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r \implies \sin r = \frac{\sin i}{n_{\text{prisme}}} \implies$$

$$r = \arcsin \left(\frac{\sin i}{n_{\text{prisme}}} \right) = \arcsin \left(\frac{\sin(45^\circ)}{1,5} \right) = 28,1^\circ$$

Selon la figure qui précède, l'angle d'incidence sur la deuxième face est de $\phi - r = 31,9^\circ$.

Toujours avec l'équation 4.3, on calcule s , le deuxième angle de réfraction :

$$n_{\text{prisme}} \sin (\phi - r) = n_{\text{air}} \sin s \implies s = \arcsin (n_{\text{prisme}} \sin (\phi - r)) \implies$$

$$s = \arcsin ((1,5) \sin (31,9^\circ)) = 52,4^\circ$$

Le rayon lumineux subit une première déviation qui correspond à un angle $i - r$ et une seconde déviation de $s - (\phi - r)$. La déviation totale δ est donc de

$$\delta = (i - r) + (s - (\phi - r)) = (45^\circ - 28,1^\circ) + (52,4^\circ - 31,9^\circ) = \boxed{37,4^\circ}$$

E24. Pour les petits angles, on a $\sin \theta \approx \theta$. On suppose que le rayon incident frappe la face gauche du prisme avec un angle qui se rapproche de la normale à cette face. L'équation 4.3 donne alors

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r \implies i = nr \quad (\text{i})$$

On voit, dans la figure de l'exercice précédent, que l'angle d'incidence sur la deuxième face est de $\phi - r$. Toujours avec l'équation 4.3, si s est le deuxième angle de réfraction et que tous les angles sont petits, on note que

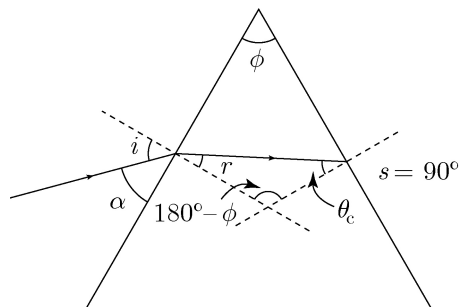
$$n_{\text{prisme}} \sin (\phi - r) = n_{\text{air}} \sin s \implies s = n(\phi - r) \quad (\text{ii})$$

Toujours selon l'exercice 23, la déviation totale δ est donnée par $\delta = (i - r) + (s - (\phi - r))$.

Si on insère les équations (i) et (ii) dans cette équation, on obtient

$$\delta = (nr - r) + (n(\phi - r) - (\phi - r)) \implies \boxed{\delta = (n - 1)\phi} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

E25. La figure qui suit définit les angles et montre le trajet du rayon lumineux dans le cas critique :



Comme $\alpha + i = 90^\circ$, on note que $\cos \alpha = \sin i$. Ainsi, si on applique l'équation 4.3 à la première face du prisme, on obtient

$$n_{\text{air}} \sin i = n_{\text{prisme}} \sin r \implies \cos \alpha = n_{\text{prisme}} \sin r \quad (\text{i})$$

Comme on peut le constater pour le triangle formé par r et θ_c , la relation entre les angles est

$$180^\circ - r - \theta_c = 180^\circ - \phi \implies r = \phi - \theta_c \quad (\text{ii})$$

Si on insère le résultat (ii) dans l'équation (i), on obtient

$$\boxed{\cos \alpha = n_{\text{prisme}} \sin (\phi - \theta_c)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

E26. On donne $R = 40 \text{ cm}$, donc $f = \frac{R}{2} = 20 \text{ cm}$.

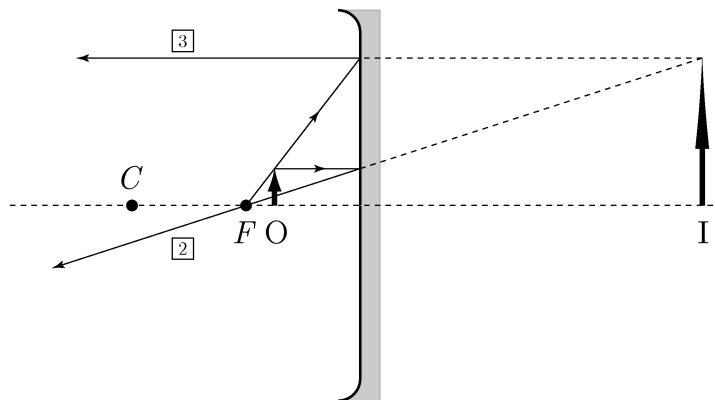
(a) Avec $p = 15 \text{ cm}$ dans l'équation 4.8, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{20 \text{ cm}} - \frac{1}{15 \text{ cm}} \right)^{-1} \implies \boxed{q = -60,0 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.9 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{-60 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \implies \boxed{m = 4,00}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



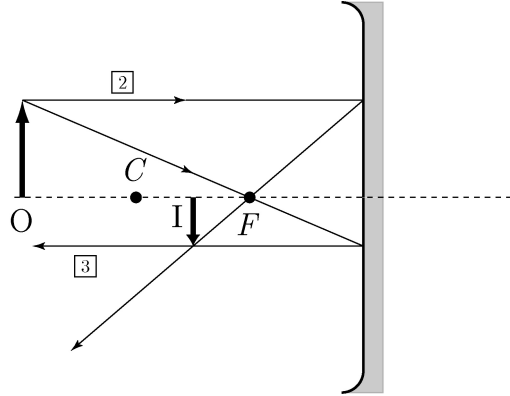
(b) Avec $p = 60 \text{ cm}$ dans l'équation 4.8, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{20 \text{ cm}} - \frac{1}{60 \text{ cm}}\right)^{-1} \implies \boxed{q = 30,0 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.9 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{30 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} \implies \boxed{m = -0,500}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



E27. On donne $R = -40 \text{ cm}$, donc $f = \frac{R}{2} = -20 \text{ cm}$.

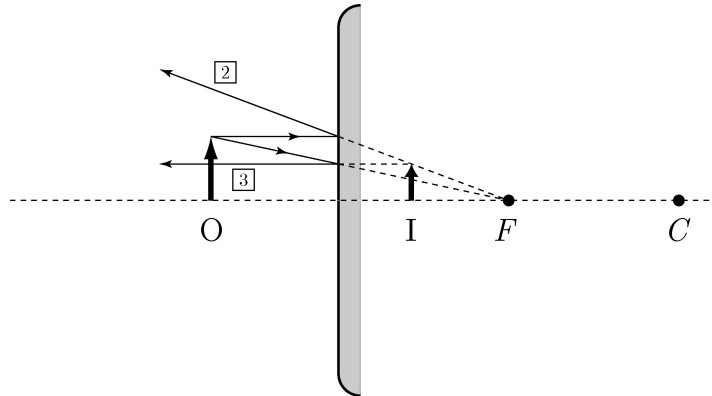
(a) Avec $p = 15 \text{ cm}$ dans l'équation 4.8, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{-20 \text{ cm}} - \frac{1}{15 \text{ cm}}\right)^{-1} \implies \boxed{q = -8,57 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.9 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{-8,57 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \implies \boxed{m = 0,571}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



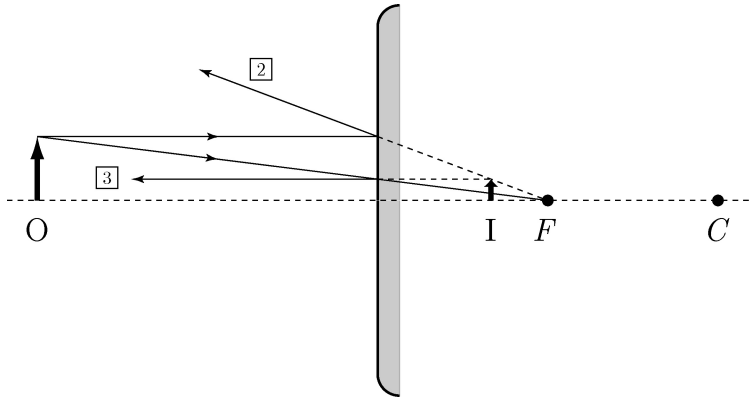
(b) Avec $p = 40 \text{ m}$ dans l'équation 4.8, on obtient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{-20 \text{ cm}} - \frac{1}{40 \text{ cm}}\right)^{-1} \implies \boxed{q = -13,3 \text{ cm}}$$

On calcule le grandissement linéaire avec l'équation 4.9 :

$$m = -\frac{q}{p} = -\frac{-13,3 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} \implies \boxed{m = 0,333}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



E28. On donne $p = 40 \text{ cm}$, $y_O = 2 \text{ cm}$ et $y_I = 3,6 \text{ cm}$. Selon l'équation 4.9, le grandissement linéaire est

$$m = \frac{y_I}{y_O} = \frac{3,6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 1,8$$

(a) Un miroir convexe produit toujours une image plus petite que l'objet, donc il s'agit d'un miroir **concave**.

(b) On calcule q directement au moyen de l'équation 4.9 :

$$m = -\frac{q}{p} \implies q = -mp = -(1,8)(40 \text{ cm}) = \boxed{-72,0 \text{ cm}}$$

(c) On calcule f directement au moyen de l'équation 4.8 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{40 \text{ cm}} + \frac{1}{-72,0 \text{ cm}} \implies f = \boxed{90,0 \text{ cm}}$$

E29. On donne $p = 60 \text{ cm}$ et $|y_I| = 0,4y_O$. Comme l'image est réelle, $q > 0$, donc $m < 0$ ou encore $m = -0,4$. La valeur du grandissement linéaire étant connue, on peut calculer la position de l'image :

$$m = -\frac{q}{p} \implies q = -mp = -(-0,4)(60 \text{ cm}) = 24 \text{ cm}$$

On calcule ensuite le rayon de courbure R en combinant les équations 4.7 et 4.8 :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{24,0 \text{ cm}} \implies R = \boxed{34,3 \text{ cm}}$$

E30. On donne $f = 30 \text{ cm}$ et $|y_I| = 2,5y_O$.

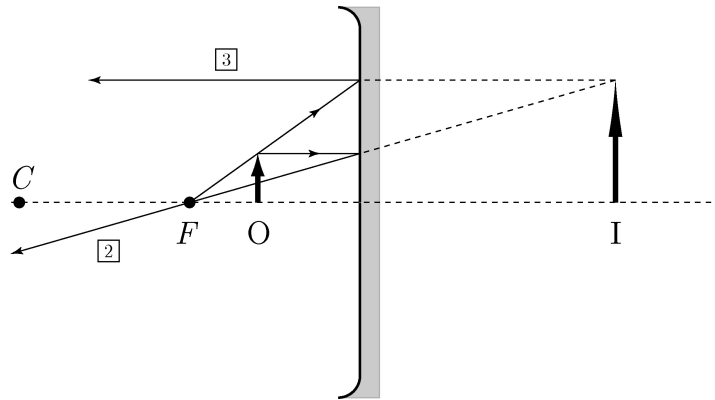
(a) Si l'image est droite, on a $m > 0$ ou encore $m = 2,5$, et l'équation 4.9 s'écrit

$$q = -mp \implies q = -2,5p$$

On insère ensuite cette relation dans l'équation 4.8 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-2,5p} = \frac{1}{p}(0,6) \implies p = (0,6)f = (0,6)(30 \text{ cm}) = \boxed{18,0 \text{ cm}}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



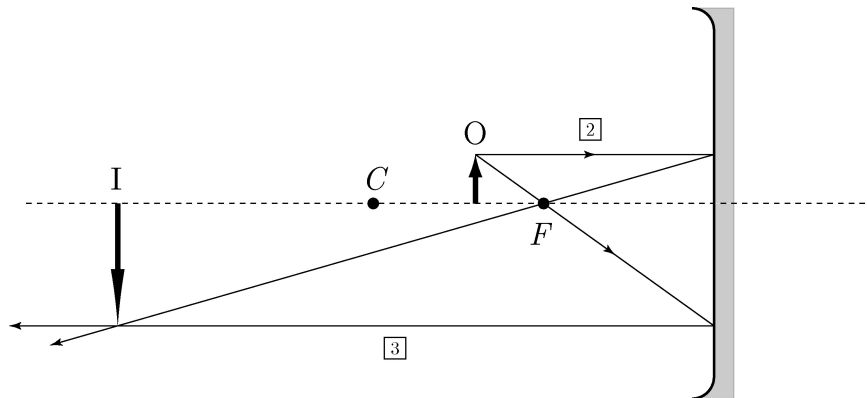
(b) Si l'image est renversée, on a $m < 0$ ou encore $m = -2,5$, et l'équation 4.9 s'écrit

$$q = -mp \implies q = 2,5p$$

On insère ensuite cette relation dans l'équation 4.8 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2,5p} = \frac{1}{p} (1,4) \implies p = (1,4) f = (1,4) (30 \text{ cm}) = \boxed{42,0 \text{ cm}}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



E31. On donne $f = -30 \text{ cm}$ et $m = 0,4$. L'équation 4.9 permet d'écrire que

$$q = -mp \implies q = -0,4p$$

On insère ensuite cette relation dans l'équation 4.8 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-0,4p} = \frac{1}{p} (-1,5) \implies p = (-1,5) f = (-1,5) (-30 \text{ cm}) = \boxed{45,0 \text{ cm}}$$

E32. On donne $p = 22 \text{ cm}$ et $m = -3,2$. On peut calculer la position de l'image avec l'équation

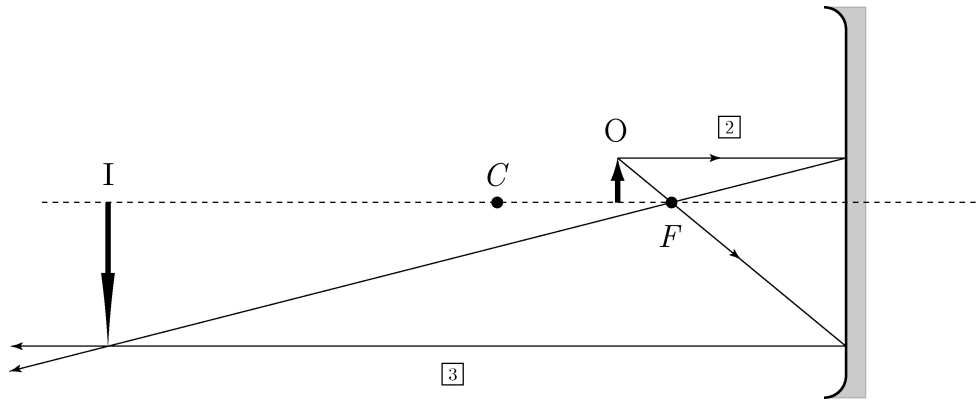
4.9 :

$$m = -\frac{q}{p} \implies q = -mp = -(-3,2) (22 \text{ cm}) = 70,4 \text{ cm}$$

On insère ensuite ces valeurs dans l'équation 4.8 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{22 \text{ cm}} + \frac{1}{70,4 \text{ cm}} \implies f = \boxed{16,8 \text{ cm}}$$

Le tracé de deux des rayons principaux donne



E33. On donne $R = -16$ cm, donc $f = \frac{R}{2} = -8$ cm, et $m = 0,333$.

(a) L'équation 4.9 permet d'écrire que

$$q = -mp \implies q = -0,333p$$

On insère ensuite cette relation dans l'équation 4.8 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{-0,333p} = \frac{1}{p}(-2,00) \implies p = (-2,00)f = (-2,00)(-8 \text{ cm}) = \boxed{16,0 \text{ cm}}$$

(b) On reprend l'équation 4.9, ce qui donne

$$q = -mp \implies q = -0,333(16,0 \text{ cm}) = \boxed{-5,33 \text{ cm}}$$

E34. On donne $p = 3,2$ cm et $m = 0,4$.

(a) On peut calculer la position de l'image avec l'équation 4.9 :

$$m = -\frac{q}{p} \implies q = -mp = -(0,4)(3,2 \text{ cm}) = \boxed{-1,28 \text{ cm}}$$

(b) On insère ensuite les valeurs obtenues en (a) dans l'équation 4.8 :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{3,2 \text{ cm}} + \frac{1}{-1,28 \text{ cm}} \implies f = \boxed{-2,13 \text{ cm}}$$

E35. On donne $p = 20$ cm et $|y_I| = 1,4y_O$.

Si l'image est *inversée*, on a $m < 0$ ou encore $m = -1,4$, et l'équation 4.9 permet de calculer la position de l'image :

$$q = -mp \implies q = -(-1,4)(20 \text{ cm}) = 28 \text{ cm}$$

On insère ensuite ces valeurs dans l'équation 4.8 et on trouve la *première* valeur de la distance focale :

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{28 \text{ cm}} \implies f_1 = \boxed{11,7 \text{ cm}}$$

Si l'image est *droite*, on a $m > 0$ ou encore $m = 1,4$, et l'équation 4.9 permet de calculer l'autre position de l'image :

$$q = -mp \implies q = -(1,4)(20 \text{ cm}) = -28 \text{ cm}$$

On insère ensuite ces valeurs dans l'équation 4.8 et on trouve la *seconde* valeur de la

distance focale :

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{-28 \text{ cm}} \implies f_1 = \boxed{70,0 \text{ cm}}$$

E36. On donne $p = 60 \text{ cm}$ et $f > 0$.

- (a) Si $q > 0$ et que $|y_I| = 0,6y_O$, on a $m = -0,6$, et l'équation 4.9 permet de calculer la position de l'image :

$$q = -mp \implies q = -(-0,6)(60 \text{ cm}) = 36,0 \text{ cm}$$

On calcule ensuite le rayon de courbure R en combinant les équations 4.7 et 4.8 :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{36,0 \text{ cm}} \implies R = \boxed{45,0 \text{ cm}}$$

- (b) Si $q > 0$ et que $|y_I| = 1,25y_O$, on a $m = -1,25$, et l'équation 4.9 permet de calculer la position de l'image :

$$q = -mp \implies q = -(-1,25)(60 \text{ cm}) = 75,0 \text{ cm}$$

On calcule ensuite le rayon de courbure R en combinant les équations 4.7 et 4.8 :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{75,0 \text{ cm}} \implies R = \boxed{66,7 \text{ cm}}$$

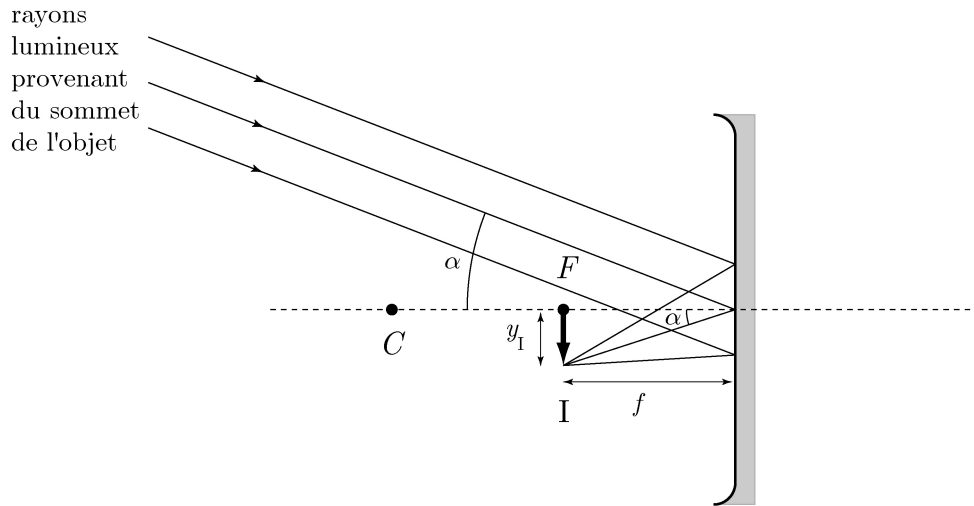
- (c) Si $q < 0$ et que $|y_I| = 1,80y_O$, on a $m = 1,80$, et l'équation 4.9 permet de calculer la position de l'image :

$$q = -mp \implies q = -(1,80)(60 \text{ cm}) = -108 \text{ cm}$$

On calcule ensuite le rayon de courbure R en combinant les équations 4.7 et 4.8 :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{60 \text{ cm}} + \frac{1}{-108 \text{ cm}} \implies R = \boxed{270 \text{ cm}}$$

E37. Bien qu'il s'agisse ici d'un miroir et non d'une lentille, cette situation est similaire à celle que décrit la figure 5.27 du manuel et qui traite de l'image formée par les télescopes. Si l'objet se trouve loin du miroir, la lumière en provenance de tous ses points forment des familles de rayons quasi parallèles entre eux. Pour chaque point et en particulier pour celui qui se trouve au sommet de l'objet, ces rayons convergent au foyer du miroir, à une certaine distance au-dessous de l'axe optique, et l'image réelle y apparaît, comme dans cette figure :



- (a) Comme on peut s'en rendre compte en examinant le rayon lumineux qui frappe le centre du miroir, l'angle α que sous-tend l'image par rapport au miroir est le même que celui que sous-tend l'objet ($y_O = 2r$) situé à une distance d du miroir. Dès lors, comme $\tan \alpha = \frac{|y_I|}{f}$ et $\tan \alpha = \frac{y_O}{d} = \frac{2r}{d}$, on arrive à

$$\frac{|y_I|}{f} = \frac{2r}{d} \implies \boxed{|y_I| = \frac{2rf}{d}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- (b) On donne $f = 16,8 \text{ m}$ et $r = 1,74 \times 10^6 \text{ m}$. Comme la distance Terre-Lune correspond à $d = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$, on obtient

$$|y_I| = \frac{2rf}{d} = \frac{2(1,74 \times 10^6)(16,8)}{3,84 \times 10^8} = \boxed{15,2 \text{ cm}}$$

- E38.** Le délai en temps Δt nécessaire à la lumière pour parcourir une distance s équivaut à $\Delta t = \frac{s}{c}$, où $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$.

(a) Pour $s = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$, on obtient $\Delta t = \frac{s}{c} = \frac{3,84 \times 10^8}{3,00 \times 10^8} = \boxed{1,28 \text{ s}}$

(b) Pour $s = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$, on obtient $\Delta t = \frac{s}{c} = \frac{1,5 \times 10^{11}}{3,00 \times 10^8} = 500 \text{ s} = \boxed{8,33 \text{ min}}$

- E39.** (a) Une année-lumière (a.l.) correspond à la distance s que franchit la lumière durant 1 an :

$$s = c\Delta t = (2,998 \times 10^8 \text{ m/s}) (1 \text{ an}) \times \left(\frac{365,24 \text{ j}}{1 \text{ an}}\right) \times \left(\frac{86400 \text{ s}}{1 \text{ j}}\right) = \boxed{9,46 \times 10^{15} \text{ m}}$$

- (b) En années-lumière, la distance Terre-Soleil correspond à

$$s = (1,5 \times 10^{11} \text{ m}) \times \left(\frac{1 \text{ a.l.}}{9,46 \times 10^{15} \text{ m}}\right) = \boxed{1,59 \times 10^{-5} \text{ a.l.}}$$

- E40.** Selon la méthode Römer, on calcule la vitesse de la lumière en faisant le rapport entre le rayon de l'orbite terrestre (r_T) et la moitié du délai ($\Delta t_{\text{orb}} = 22 \text{ min}$) de variation des éclipses, ce qui donne

$$c = \frac{r_T}{\frac{1}{2}\Delta t_{\text{orb}}} = \frac{1,5 \times 10^{11}}{\frac{1}{2}(22 \text{ min})} = \boxed{2,27 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

- E41.** Dans l'expérience de Michelson, le temps requis pour un tour complet avec $d = 35 \text{ km}$

est

$$\Delta t = \frac{2d}{c} = \frac{2(3,5 \times 10^4)}{3 \times 10^8} = 2,33 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Le prisme doit effectuer $\frac{1}{8}$ tour pendant la durée Δt , ce qui donne la fréquence

$$f = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\Delta t} \right) = \boxed{536 \text{ tr/s}}$$

E42. Dans l'expérience de Fizeau, une roue ayant 360 dents doit effectuer $\frac{1}{360}$ tour en

$$\Delta t = \frac{2d}{c} = \frac{2(4 \times 10^3)}{3 \times 10^8} = 2,67 \times 10^{-5} \text{ s}$$

La fréquence de rotation est alors de

$$f = \frac{1}{360} \left(\frac{1}{\Delta t} \right) = \boxed{104 \text{ tours/s}}$$

E43. $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 \implies (1) \sin(30^\circ) = (1,33) \sin \theta_2 = (1,5) \sin \theta_3 \implies$

$$\theta_3 = 19,5^\circ \implies \Delta\theta = \boxed{10,5^\circ}$$

E44. $n \sin(45^\circ) = (1,5) \sin \theta_2 \implies n = 1,306 \implies v = \frac{c}{n} = \boxed{2,30 \times 10^8 \text{ m/s}}$

E45. On calcule d'abord l'angle $\theta_{\text{eau-V}}$ que forme le rayon lumineux par rapport à la verticale, dans l'eau :

$$\sin(75^\circ) = (1,33) \sin \theta_{\text{eau-V}} \implies \theta_{\text{eau-V}} = \arcsin\left(\frac{\sin(75^\circ)}{1,33}\right) = 46,57^\circ$$

Comme le vase est cylindrique, toute normale à la paroi est perpendiculaire à celle de la surface et ce même rayon forme un angle $\theta_{\text{eau-P}} = 90^\circ - \theta_{\text{eau-V}} = 43,43^\circ$ par rapport à la normale à la paroi.

La lumière traverse alors les deux interfaces qui la conduise dans le verre, puis l'air.

Comme ces deux interfaces sont parallèles, on peut omettre le calcul dans le verre et obtenir directement la valeur de l'angle θ apparaissant à la figure 4.65 du manuel :

$$(1,33) \sin \theta_{\text{eau-P}} = (1) \sin \theta_{\text{air}} \implies \theta_{\text{air}} = \arcsin((1,33) \sin(43,43^\circ)) = \boxed{66,1^\circ}$$

E46. $n \sin(60^\circ) = 1 \implies n = \boxed{1,15}$

E47. $\sin(40^\circ) n \sin \theta$, $\theta_{400 \text{ nm}} = 22,78^\circ$ et $\theta_{700 \text{ nm}} = 23,53^\circ$. Sur la deuxième face,

$$d_{400 \text{ nm}} (2,4) \tan \theta_{400 \text{ nm}} \text{ et } d_{700 \text{ nm}} (2,4) \tan \theta_{700 \text{ nm}} \implies \Delta d = 0,0372 \text{ cm}$$

La distance perpendiculaire entre les deux rayons sortants est de

$$\Delta d \tan(50^\circ) = \boxed{0,0443 \text{ cm}}$$

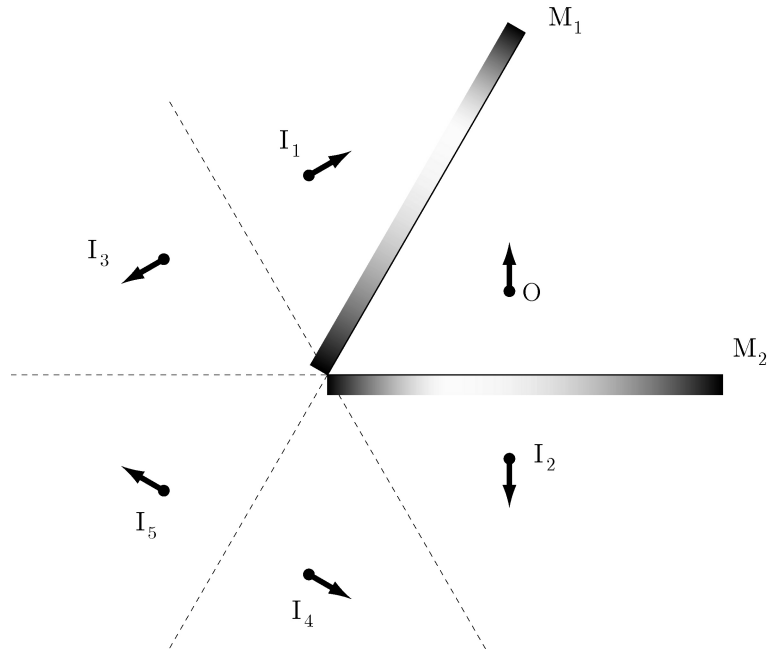
E48. $\sin(45^\circ) (1,55) \sin r \implies r = 27,1^\circ$ et $i' = 45^\circ - 27,1^\circ = 17,9^\circ \implies$

$$(1,55) \sin(17,9^\circ) = \sin \theta \implies \theta = \boxed{28,5^\circ}$$

E49. Au moyen de la figure 4.29, on obtient

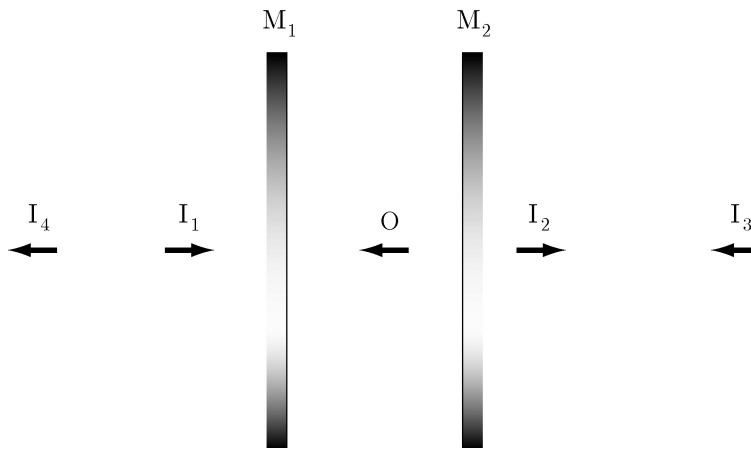
$$\sin i = (1,61) \sin(15^\circ) \implies i = 24,6^\circ \implies \delta = 2(i - r) = \boxed{19,3^\circ}$$

E50. On utilise la technique des miroirs virtuels pour prolonger les miroirs réels M_1 et M_2 . De cette façon, on arrive à former toutes les images possibles en les disposant à distance égale de part et d'autre des miroirs. On trouve les premières images I_1 et I_2 , puis les images de ces images, respectivement I_3 et I_4 , et finalement I_5 , qui est à la fois l'image de I_4 et de I_3 :



Pour un angle de séparation $\theta = 60^\circ$ entre les miroirs, on observe qu'il y a en effet $\left(\frac{360^\circ}{\theta}\right) - 1 = \boxed{5 \text{ images}}$ produites. Cette relation se vérifie pour d'autres valeurs d'angle θ .

E51. On utilise la technique des miroirs virtuels. De cette façon, on arrive à former toutes les images possibles en les disposant à distance égale de part et d'autre des miroirs. On trouve les premières images I_1 et I_2 , puis les images de ces images, respectivement I_3 et I_4 :



E52. $m = -\frac{q}{p} = 3 \implies q = -3p$. Avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{36 \text{ cm}} \implies$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{3p} = \frac{1}{36 \text{ cm}} \implies p = \boxed{24,0 \text{ cm}}$$

E53. $m = -\frac{q}{p} = \frac{1}{3} \implies q = -\frac{p}{3}$. Avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{24 \text{ cm}} \implies$

$$\frac{1}{p} - \frac{3}{p} = -\frac{1}{24 \text{ cm}} \implies p = \boxed{48,0 \text{ cm}}$$

E54. $m = -\frac{q}{p} = 4 \implies q = -4p$. Avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies f = \boxed{24,0 \text{ cm}}$

E55. $\frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{-14 \text{ cm}} = \frac{1}{f} \implies f = 35 \text{ cm} \implies$

$$\frac{1}{20 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{35 \text{ cm}} \implies \boxed{q = -47,6 \text{ cm}} \text{ et } \boxed{m = 2,34}$$

L'image est virtuelle.

E56. $\frac{1}{27 \text{ cm}} + \frac{1}{15,9 \text{ cm}} = \frac{1}{f} \implies f = 10 \text{ cm} \implies \frac{1}{15 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{10 \text{ cm}} \implies q = \boxed{30,0 \text{ cm}}$

E57. $\frac{h}{f} = \tan(0,52^\circ) \implies h = f \tan(0,52^\circ) = \boxed{7,26 \times 10^{-4} \text{ m}}$

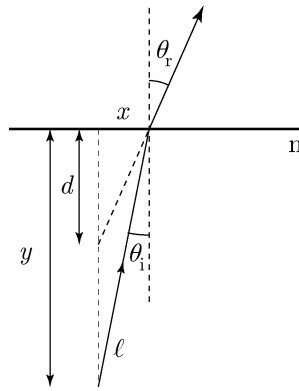
E58. (a) $\frac{1}{p} + \frac{1}{-60 \text{ cm}} = \frac{1}{60 \text{ cm}} \implies p = \boxed{30,0 \text{ cm}}$

(b) $m = -\frac{q}{p} = \boxed{2,00}$

Problèmes

P1. En vertu de la loi de Snell-Descartes, on a pour $y = 10 \text{ cm}$, $n = 1,33$ et $\theta_r = 5^\circ$:

$$\sin \theta_r = n \sin \theta_i \implies \sin(5^\circ) = (1,33) \sin \theta_i \implies \theta_i = 3,76^\circ$$

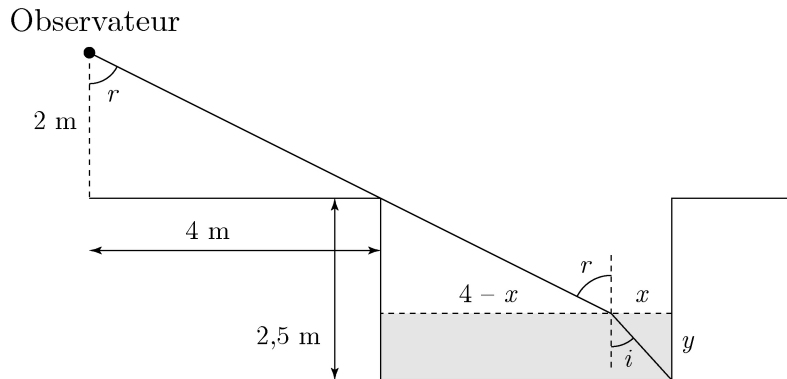


Pour trouver la profondeur apparente d , on observe géométriquement que $y = \ell \cos \theta_i$ et

$$x = \ell \sin \theta_i \implies x = y \tan \theta_i$$

$$x = d \tan \theta_r \implies d = \frac{x}{\tan \theta_r} = \frac{y \tan \theta_i}{\tan \theta_r} \implies d = \boxed{7,51 \text{ cm}}$$

P2. On cherche la hauteur d'eau dans la piscine afin que l'image de la pièce parvienne à l'observateur. La géométrie du problème est alors déterminée par la position de ce dernier :



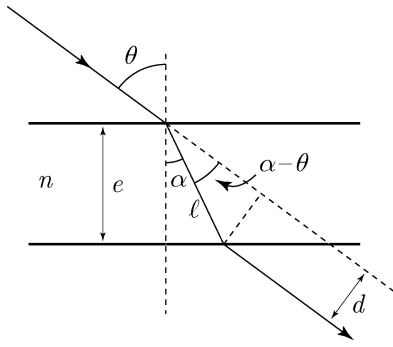
$$\tan r = \frac{4}{2} = 2 \implies r = 63,4^\circ \text{ et } (1,33) \sin i = \sin r \implies i = 42,3^\circ$$

On observe, au niveau de l'interface entre l'eau et l'air, que

$$\tan r = \frac{4-x}{2,5-y} = 2 \implies 4-x = 5-2y \text{ et } \frac{x}{y} = \tan i = \tan(42,3^\circ) = 0,909 \implies$$

$$4-0,909y = 5-2y \implies (2-0,909)y = 1 \implies y = \boxed{0,916 \text{ m}}$$

P3. Un rayon incident à angle θ sur une plaque de verre est dévié latéralement d'une distance d :



On établit directement au moyen de cette figure la relation entre d , ℓ et e :

$$d = \ell \sin(\theta - \alpha) \text{ où } \ell = \frac{e}{\cos \alpha} \implies d = \frac{e}{\cos \alpha} \sin(\theta - \alpha)$$

où la relation entre θ et α correspond à la loi de Snell-Descartes, qui s'écrit avec la condition « θ est petit » selon les approximations suivantes :

$$\sin \theta = n \sin \alpha \text{ avec } \sin \theta \approx \theta \implies \theta = n\alpha \text{ pour } \theta \text{ et } \alpha \text{ en radians}$$

La condition « θ est petit » implique de plus que α est petit aussi

(car $\sin \alpha = \frac{1}{n} \sin \theta < \sin \theta$), donc

$$\ell = \frac{e}{\cos \alpha} \approx e \implies d \approx e(\theta - \alpha) = e\theta \left(1 + \frac{1}{n}\right) \implies \boxed{d = e\theta \left(\frac{n-1}{n}\right)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

P4. On considère une plaque de verre d'épaisseur $e = 2,4$ cm et les indices de réfraction pour les lumières rouge et bleu, $n_R = 1,58$ et $n_B = 1,62$.

(a) L'angle entre les rayons réfractés dans la plaque pour un angle d'incidence $\theta = 30^\circ$ est

$$n_R \sin \alpha_R = \sin(30^\circ) \implies (1,58) \sin \alpha_R = 0,5 \implies \alpha_R = 18,449^\circ \text{ et}$$

$$(1,62) \sin \alpha_B = 0,5 \implies \alpha_B = 17,997^\circ \implies \Delta\alpha = \boxed{0,471^\circ}$$

(b) On utilise l'équation obtenue à l'exercice 11 et on obtient avec θ , α_R et α_B

$$d = \frac{e \sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \implies d_R = 0,5066 \text{ cm et } d_B = 0,5256 \text{ cm} \implies \Delta d = \boxed{0,190 \text{ mm}}$$

P5. Dans le logiciel Maple, on définit l'expression de la loi de Snell-Descartes pour $n_1 = 1,33$ et $n_2 = 1$, et dans laquelle on isole r , l'angle de réfraction. L'équation est modifiée pour que les angles soit fournis et calculés en degrés :

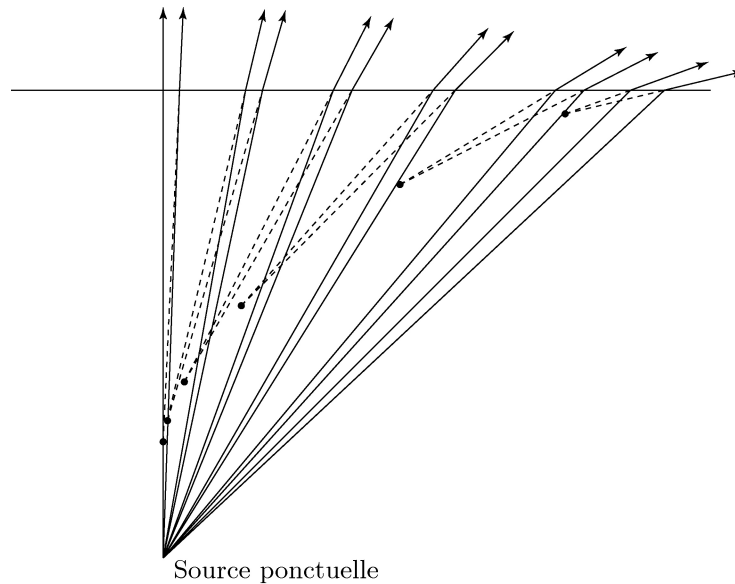
```
> restart;
> eq:=n*sin(i*Pi/180)=sin(r*Pi/180);
> r:=solve(eq,r);
> n:=1.33;
> i:=2;
> evalf(r);
```

On calcule ensuite les angles de réfraction r et r' pour les angles d'incidence i et $i + 2^\circ$

du tableau ci-dessous. On obtient

i	0°	10°	20°	30°	40°	45°
r	0°	$13,35^\circ$	$27,06^\circ$	$41,68^\circ$	$58,75^\circ$	$70,13^\circ$
r'	$2,66^\circ$	$16,05^\circ$	$29,88^\circ$	$44,81^\circ$	$62,87^\circ$	$76,58^\circ$

Ce qui donne la figure qui suit si on trace les rayons réfractés en les prolongeant vers l'arrière de façon à déterminer les profondeurs apparentes aux points d'intersection. La courbe ainsi définie par les points-images est appelée *caustique*. Partant de la verticale au-dessus de l'eau, un observateur qui se déplace verra la position apparente de l'objet immergé se déplacer le long de la caustique.



- P6.** Considérant que l'équation des miroirs est l'expression d'une fonction $q(p)$, on calcule la dérivée de cette équation par rapport à la variable indépendante p :

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) + \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{q} \right) = \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{f} \right) \implies - \left(\frac{1}{p} \right)^2 - \left(\frac{1}{q} \right)^2 \frac{dq}{dp} = 0 \implies \boxed{\frac{dq}{dp} = -\frac{q^2}{p^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P7.** On utilise le résultat de l'exercice 11 où l'on développe le sinus d'une différence :

$$d = \frac{e \sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{e}{\cos \alpha} (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) = e \left(\sin \theta - \frac{\cos \theta \sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

Avec les relations $\sin \theta = n \sin \alpha$ et $\cos^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)$, on obtient directement

$$d = e \sin \theta \left(1 - \frac{\cos \theta}{n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}}} \right) \implies \boxed{d = e \sin \theta \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right)} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- P8.** Entre les deux milieux d'indices n et n' , la réflexion totale interne survient dans le cylindre pour un angle d'incidence supérieur ou égal à θ_c . Cet angle d'incidence θ_c est complémentaire à l'angle α , qui est lui-même lié à l'angle d'incidence θ par la réfraction initiale à l'interface entre les milieux d'indices n_0 et n .

Pour la réflexion totale interne à l'interface (n, n') on a $n \sin \theta_c = n'$.

Pour la réfraction initiale à l'interface (n_0, n) on a $n_0 \sin \theta = n \sin \alpha$.

Or, $\alpha = 90^\circ - \theta_c \implies n_0 \sin \theta = n \sin(90^\circ - \theta_c) = n \cos \theta_c$

(a) Avec les relations $n \sin \theta_c = n'$ et $\cos^2 \theta_c = (1 - \sin^2 \theta_c)$, on obtient directement

$$\cos \theta_c = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} \text{ et } \sin \theta_c = \frac{n'}{n} \implies \cos \theta_c = \sqrt{1 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2} \implies$$

$$n_0 \sin \theta = n \cos \theta_c = n \sqrt{1 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2} \implies \boxed{n_0 \sin \theta = \sqrt{n^2 - n'^2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) Le cas particulier d'une fibre optique entourée d'air donne

$$\sin \theta = n \sin \alpha = n \cos \theta_c = n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} = n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \implies \boxed{\sin \theta = \sqrt{n^2 - 1}}$$

P9.

Le principe de Fermat appliqué à la réflexion sur un miroir stipule que la lumière emprunte le chemin optique qui minimise le temps de parcours entre deux points A et B . On paramétrise tous les chemins optiques possibles avec un point d'incidence repéré par la variable x sur le miroir. On cherche ensuite l'expression du temps de parcours en termes de x et t , et il s'agit de montrer que le temps minimal correspond à la loi de réflexion, $\theta_1 = \theta_2$.

(a) L'expression du temps de parcours est

$$t = \frac{d_1}{c} + \frac{d_2}{c} \implies \boxed{t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{c} + \frac{\sqrt{(L-x)^2+b^2}}{c}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) Avec la condition d'un délai minimal et au moyen de la figure 4.72, on trouve

$$c \frac{dt}{dx} = 0 \implies c \frac{dt}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+b^2}} = 0 \implies$$

$$\sin \theta_1 - \sin \theta_2 = 0 \implies \sin \theta_1 = \sin \theta_2 \implies \boxed{\theta_1 = \theta_2} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

P10.

Le principe de Fermat appliqué à la réfraction à l'interface entre deux milieux stipule que la lumière emprunte le chemin optique qui minimise le temps de parcours entre A et B .

(a) On paramétrise tous les chemins optiques possibles avec un point d'incidence repéré par x et on exprime le temps de parcours dans chaque milieu par

$$t = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} \implies \boxed{t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2+b^2}}{v_2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

(b) Avec la condition d'un délai minimal et au moyen de la figure 4.73, on trouve

$$\frac{dt}{dx} = 0 \implies \frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2-a^2}} - \frac{L-x}{v_2 \sqrt{(L-x)^2+b^2}} = 0 \implies$$

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} = 0 \implies \boxed{\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

P11.

La figure 4.74 décrit la formation de l'arc-en-ciel principal, où, après avoir subi une réflexion, la lumière est de nouveau dispersée lorsqu'elle sort de la goutte.

- (a) Chaque réflexion correspond à un changement de direction de $(i - r)$, et la réflexion correspond à un changement de direction de $(\pi - 2r)$. La déviation totale est donc

$$\delta = 2(i - r) + (\pi - 2r) \implies \boxed{\delta = \pi + 2i - 4r} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

- (b) Pour montrer que δ possède une valeur minimale, on calcule

$$\frac{d\delta}{di} = 2 - 4\frac{dr}{di} = 0 \implies \frac{dr}{di} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

En dérivant par rapport à i l'équation $\sin i = n \sin r$, on obtient

$$\frac{d}{di}(\sin i) = \frac{d}{di}(n \sin r) \implies \cos i = n \cos r \frac{dr}{di} = \frac{n \cos r}{2} \implies n^2 \cos^2 r = 4 \cos^2 i$$

Avec $\sin^2 i = n^2 \sin^2 r$ et l'identité $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, applicable aux deux angles, on obtient

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \text{ où } n = \frac{4}{3} \implies i = 59,4^\circ$$

$$\sin i = n \sin r \implies r = 40,2^\circ \text{ et } (2i - 4r) = -42,0^\circ \implies \boxed{\delta = 180^\circ - 42^\circ} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$

P12. La figure 4.75 décrit la formation de l'arc-en-ciel secondaire, où, après avoir subi deux réflexions, la lumière est de nouveau dispersée lorsqu'elle sort de la goutte.

- (a) Chaque réflexion correspond à un changement de direction de $(i - r)$, et les deux réflexions correspondent à un changement de direction de $(\pi - 2r)$. La déviation totale est donc

$$\delta = 2(i - r) + 2(\pi - 2r) = \boxed{2\pi + 2i - 6r}$$

- (b) Pour montrer que δ possède une valeur minimale, on calcule

$$\frac{d\delta}{di} = 2 - 6\frac{dr}{di} = 0 \implies \frac{dr}{di} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En dérivant par rapport à i l'équation $\sin i = n \sin r$, on obtient

$$\frac{d}{di}(\sin i) = \frac{d}{di}(n \sin r) \implies \cos i = n \cos r \frac{dr}{di} = \frac{n \cos r}{3} \implies n^2 \cos^2 r = 9 \cos^2 i$$

Avec $\sin^2 i = n^2 \sin^2 r$ et l'identité $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, applicable aux deux angles, on obtient

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}} \implies \boxed{\cos^2 i = \frac{n^2 - 1}{8}} \implies \boxed{\text{CQFD}}$$