

Université d'Ottawa - Département de Mathématiques et Statistique
MAT 1732C - Calcul Différentiel & Intégral pour Science de la Vie
Instructeur : Guy Beaulieu
Examen partiel II
21/03/2013

Nom : #d'étudiant :

Instructions : (Lisez-les attentivement S.V.P.)

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant sur la première page et sur chaque page détachée, s'il y a lieu, dans l'espace précisé.
- La durée de cet examen est **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livres fermés qui comporte **7 questions**.
- Vous devez justifier votre travail.
- Seules les calculatrices non programmables et non graphiques telles que la TI30X ou similaires sont permises.
- Vous avez une page supplémentaire à la fin que vous pouvez utiliser comme feuille de brouillon.

BONNE CHANCE!!!

Note Totale /40	
---------------------------	--

Question 1. [8 points] Pour une certaine population, $N(t)$ en unités de cent individus au temps t satisfait

$$\frac{dN}{dt} = \frac{5N^2}{1+N^2} - 2N.$$

(a) Trouvez les points d'équilibre de l'équation différentielle.

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= 0 \\ \frac{5N^2}{1+N^2} - 2N &= 0 \\ \frac{5N^2 - 2N(1+N^2)}{1+N^2} &= 0 \\ \frac{5N^2 - 2N - 2N^3}{1+N^2} &= 0 \\ \frac{N(5N - 2 - 2N^2)}{1+N^2} &= 0 \end{aligned}$$

Alors

$$N = 0 \text{ ou } 5N - 2 - 2N^2 = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 5N - 2 - 2N^2 &= 0 \\ 2N^2 - 5N + 2 &= 0 \\ (2N - 1)(N - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$2N - 1 = 0 \Rightarrow N = \frac{1}{2} \text{ ou } N - 2 = 0 \Rightarrow N = 2$$

Alors, les points d'équilibre de l'équation sont

$$N = 0, \quad N = \frac{1}{2}, \quad \text{et } N = 2$$

(b) Utilisez le théorème sur la stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité des points d'équilibres que vous avez trouvé en (a).

Solution : Nous avons que

$$\frac{dN}{dt} = F(N) = \frac{5N^2}{1+N^2} - 2N.$$

On calcul

$$\begin{aligned} F'(N) &= \frac{d}{dN} \left[\frac{5N^2}{1+N^2} - 2N \right] \\ &= \frac{10N(1+N^2) - 5N^2(2N)}{(1+N^2)^2} - 2 \\ &= \frac{10N + 10N^3 - 10N^3}{(1+N^2)^2} - 2 \\ &= \frac{10N}{(1+N^2)^2} - 2 \end{aligned}$$

On évalue $F'(N)$ à chaque point d'équilibre

- $F'(0) = \frac{10(0)}{(1+(0)^2)^2} - 2 = -2 < 0$, alors $N = 2$ est asymptotiquement stable.
- $F'(\frac{1}{2}) = \frac{10(\frac{1}{2})}{(1+(\frac{1}{2})^2)^2} - 2 = \frac{16}{5} - 2 > 0$, alors $N = \frac{1}{2}$ est instable.
- $F'(2) = \frac{10(2)}{(1+(2)^2)^2} - 2 = \frac{4}{5} - 2 = -\frac{6}{5} < 0$, alors $N = 2$ est asymptotiquement stable.

(c) Esquissez le portrait de phase de cette équation différentielle.

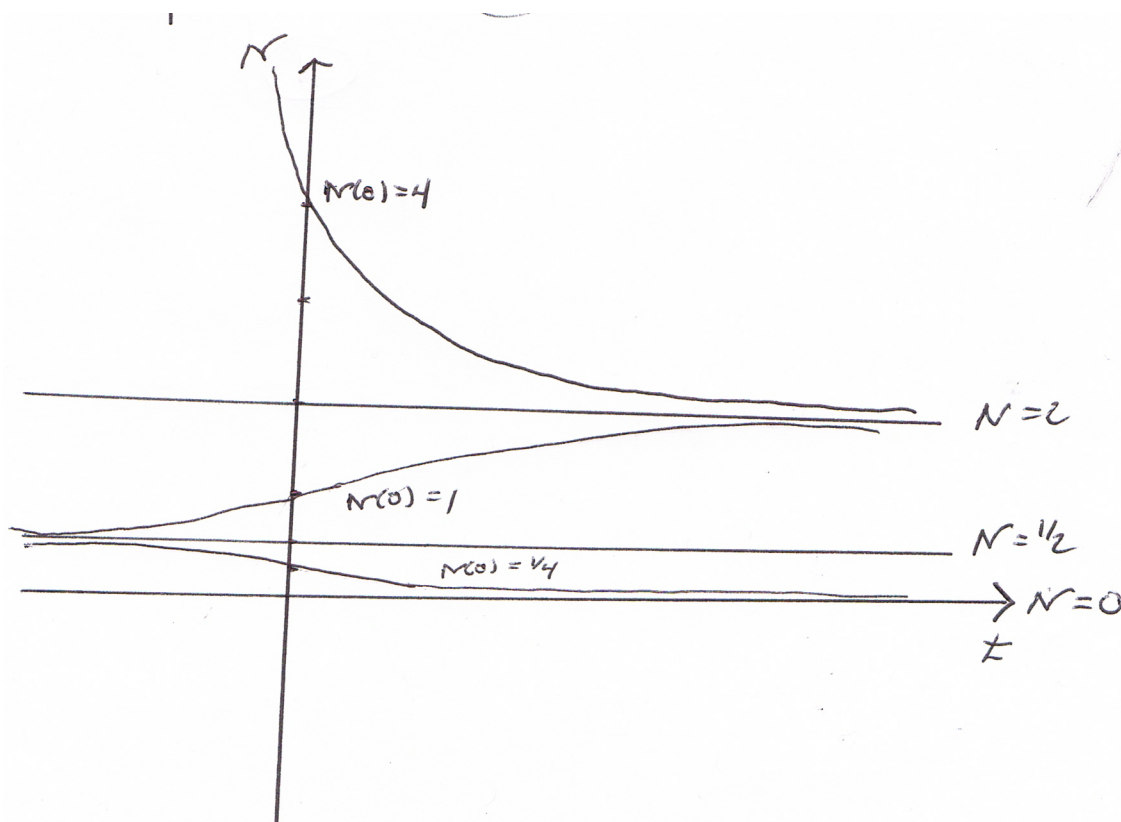
Solution :



(d) Esquissez sur le même plan cartésien :

- les solutions à l'équilibre,
- la solution avec condition initiale $N(0) = 1/4$,
- la solution avec condition initiale $N(0) = 1$ et
- la solution avec condition initiale $N(0) = 4$.

Solution :



Question 2. [8 points] Considérez les nombres complexes suivants :

$$z = 1 - i \text{ et } w = \sqrt{3} + i$$

(a) Calculez $|z|$, \bar{w} , et zw . **Solution :**

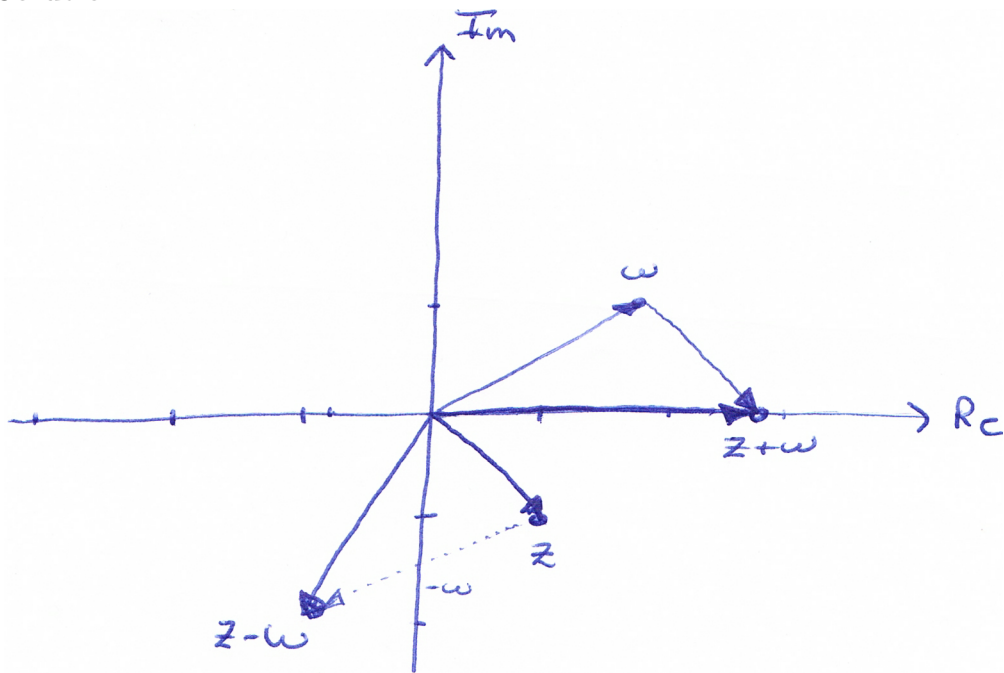
$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\bar{w} = \sqrt{3} - i$$

$$\begin{aligned} zw &= (1 - i)(\sqrt{3} + i) \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{3}i + i - i^2 \\ &= (\sqrt{3} + 1) + (1 - \sqrt{3})i \end{aligned}$$

(b) Esquissez z , w , $z + w$ et $z - w$ dans le plan cartésien.

Solution :

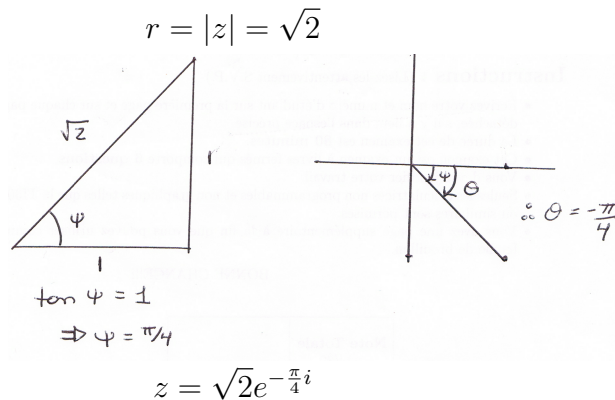


Question 2. (suite)

- (c) Exprimez z et w en forme polaire et utilisez ces formes pour exprimez zw et $\frac{z}{w}$ en forme polaire.

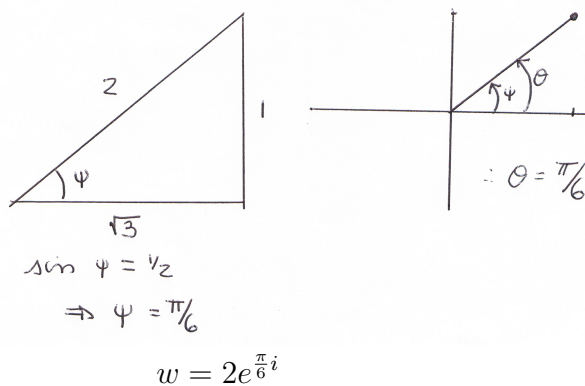
Solution :

– Pour z :



– Pour w :

$$r = |w| = \text{sqrt}(\sqrt{3})^2 + (1)^2 = \sqrt{4} = 2$$



– Alors,

$$\begin{aligned} zw &= \left(\sqrt{2}e^{-\pi/4}i\right) \left(2e^{\pi/6}i\right) \\ &= 2\sqrt{2}e^{(-\pi/4 + \pi/6)}i \\ &= 2\sqrt{2}e^{-\pi/12}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{(\sqrt{2}e^{-\pi/4}i)}{(2e^{\pi/6}i)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}e^{(-\pi/4 - \pi/6)}i \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-5\pi/12}i \end{aligned}$$

Question 3. [5 points] Résolvez le système d'équation linéaire :

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= -15 \\ 3x + y + 3z &= 11 \\ -6x - 4y + 2z &= 30 \end{aligned}$$

Solution :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3 \\ \rightsquigarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 4 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{l} (-1)R_2 \rightarrow R_2 \\ \rightsquigarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 0 & 1 & -4 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{l} R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1 \\ \rightsquigarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & 37 \\ 0 & 1 & -4 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{l} (\frac{1}{3})R_1 \rightarrow R_1 \\ \rightsquigarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{37}{3} \\ 0 & 1 & -4 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc, z est libre et on pose $z = t$ ou $t \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\begin{aligned} x &= \frac{37}{3} - \frac{7}{3}t \\ y &= -26 + 4t \\ z &= t \end{aligned}$$

Question 4. [4 points] On considère le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -1 \\ x - y + 4z &= h \\ 2x - 3y + hz &= 2 \end{aligned}$$

Donner les valeurs de h , s'ils existent, pour que le système ait :

- (a) Une seule solution.
- (b) Aucune solution.
- (c) Un nombre infini de solutions.

Solution :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & h \\ 2 & -3 & h & 2 \end{bmatrix} & \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & h \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & h & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & h \\ 0 & 1 & -5 & -1 - 2h \\ 0 & -1 & h - 8 & 2 - 2h \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[R_3 + R_2 \rightarrow R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & h \\ 0 & 1 & -5 & -1 - 2h \\ 0 & 0 & h - 13 & 1 - 4h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (a) Pour avoir une solution unique, il faut un pivot dans chaque colonne sauf la dernière. Alors, il faut que

$$h - 13 \neq 0 \rightarrow h \neq 13.$$

- (b) Pour avoir aucune solution, il faut un pivot dans la dernière colonne. Alors, il faut que

$$h - 13 = 0 \text{ et } 1 - 4h \neq 0 \Rightarrow h = 13 \text{ et } h \neq \frac{1}{4} \Rightarrow h = 13.$$

- (c) Pour avoir une infinité de solution, il faut au moins une variable libre et aucun pivot dans la dernière colonne. Alors, il faut que

$$h - 13 = 0 \text{ et } 1 - 4h = 0 \Rightarrow h = 13 \text{ et } h = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Impossible.}$$

Question 5. [4 points] Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Évaluez si possible les expressions suivantes :

(a) $2A^T + C$ (b) CA (c) $B^T + 5C^T$ (d) $(C^T B)A$

Solution :

(a)

$$\begin{aligned} 2A^T + C &= 2 \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^T + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} CA &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 - 4 + 2 & 0 + 8 + 2 \\ 9 - 1 + 5 & 0 + 2 + 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 13 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c)

$$\underbrace{\underbrace{(B)}_{2 \times 2}^T}_{2 \times 2} + 5 \underbrace{\underbrace{(C)}_{2 \times 3}^T}_{3 \times 2}$$

Donc, l'opération n'est pas possible, puisqu'on ne peut pas additionner deux matrices de différentes taille.

(d)

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(C)}_{2 \times 3}^T}_{3 \times 2} \underbrace{(B)}_{2 \times 2}}_{3 \times 2} \underbrace{(A)}_{3 \times 2}$$

Donc, l'opération n'est pas possible, puisqu'on ne peut pas multiplier deux matrices dont le nombre de colonne de la matrice de droite n'est pas égale aux nombres de ligne de la matrice de droite.

Question 6. [6 points] Déterminer si les matrices suivantes ont une inverse. Pour celles qui ont une inverse, trouver cette inverse.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solution : Pour vérifier si une matrice est inversible on calcul son déterminant.

$$\det(A) = 12 - 12 = 0$$

Alors, A n'a pas d'inverse.

$$\det(B) = (1)(5)(8) + (2)(3)(1) + (3)(2)(0) - (3)(5)(1) - (2)(2)(8) - (1)(3)(0) = 40 + 6 - 15 - 32 = -1$$

Alors, B est inversible.

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ \begin{array}{l} R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ \\ \begin{array}{l} (-1)R_3 \rightarrow R_3 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \\ \\ \begin{array}{l} R_1 - 3R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 + 3R_3 \rightarrow R_2 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \\ \\ \begin{array}{l} R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

Donc

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Question 7. [5 points] Trouvez toutes les valeurs propres de la matrice A et trouvez la famille de vecteur propre de A associée à la plus grande des valeurs propres trouvées.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Solution : Pour trouver les valeurs propres on cherche les racines du polynôme caractéristique associé à A .

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} 6 - \lambda & 5 \\ -2 & -5 - \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (6 - \lambda)(-5 - \lambda) + 10 \\ &= -30 - \lambda + \lambda^2 + 10 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 20 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 4) \end{aligned}$$

Donc, les valeurs propres sont trouvées en résolvant $p(\lambda) = 0$ sont $\lambda = 5$ et $\lambda = -4$.

Donc, on cherche les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 5$.

$$\begin{aligned} [A - 5I \mid 0] &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & \mid & 0 \\ -2 & -10 & \mid & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, v_2 est libre, on pose $v_2 = s$, où $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Page supplémentaire pour brouillon