Université d'Ottawa - Département de Mathématiques et Statistique
MAT 1732C - Calclul Différentiel & Intégral pour Science de la Vie
Instructeur : Guy Beaulieu

Examen partiel I

14/02/2013

Nom :.. #d'étudiant :............

Instructions : (Lisez-les attentivement S.V.P.)

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant sur la première page et sur chaque page détachée, s'il y a lieu, dans l'espace précisé.
- La durée de cet examen est **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livres fermés qui comporte **6 questions**.
- Vous devez justifier votre travail.
- Seules les calculatrices non programmables et non graphiques telles que la TI30X ou similaires sont permises.
- Vous avez une page supplémentaire à la fin que vous pouvez utiliser comme feuille de brouillon.

BONNE CHANCE!!!

Note Totale /40	

Question 1: [Total 6 pts]
Calculez l'intégrale suivante :

$$\int \frac{t^2+1}{t^2+3t+2}\,dt$$

Solution :

- Puisque le degré du numérateur et le degré du dénominateur sont égale, il faut faire la division polynomiale.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & \underline{1} \\ \underline{t^2+3t+2} & | & t^2 & + & 0t & + & 1 & \\ & - & (t^2 & + & 3t & + & 2) & \\ & & & - & 3t & - & 1 & \end{array}$$

- Alors, nous avons déterminé que

$$\frac{t^2+1}{t^2+3t+2} = 1 + \frac{(-3t-1)}{t^2+3t+2} = 1 - \frac{3t+1}{t^2+3t+2}$$

- Ce qui donne,

$$\int \frac{t^2+1}{t^2+3t+2}\,dt = \int \left(1 - \frac{3t+1}{t^2+3t+2}\right)dt = t - \underbrace{\int \frac{3t+1}{t^2+3t+2}\,dt}_{\text{par fraction partielle}}$$

- Puisque le numérateur est de degré inférieure au dénominateur, on passe à l'analyse du dénominateur :

$$t^2+3t+2 = (t+2)(t+1)$$

- On remarque, qu'il admet deux racines distincts et donc on cherche A et B tel que

$$\begin{aligned} \frac{3t+1}{(t+2)(t+1)} &= \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1} \\ \frac{3t+1}{(t+2)(t+1)} &= \frac{A(t+1)+B(t+2)}{(t+1)(t+2)} \\ \frac{3t+1}{(t+2)(t+1)} &= \frac{At+A+Bt+2B}{(t+1)(t+2)} \\ \frac{3t+1}{(t+2)(t+1)} &= \frac{(A+B)t+A+2B}{(t+1)(t+2)} \end{aligned}$$

- On doit donc résoudre les equations

$$\begin{aligned} A+B &= 3 \\ A+2B &= 1 \end{aligned}$$

- Puisque
$$A + B = 3 \Rightarrow A = 3 - B,$$
nous avons que
$$A + 2B = 1 \Rightarrow (3 - B) + 2B = 1 \Rightarrow 3 + B = 1 \Rightarrow B = -2.$$
- Ainsi, $A = 5$ et $B = -2$.
- On peut donc résoudre,
$$\begin{aligned} \int \frac{3t+1}{t^2+3t+2}\,dt &= \int \left(\frac{5}{t+2} + \frac{-2}{t+1} \right) dt \\ &= 5\int \frac{1}{t+2}\,dt - 2\int \frac{1}{t+1}\,dt \\ &= 5\ln|t+2| - 2\ln|t+1| + C \end{aligned}$$
- Finalement,
$$\begin{aligned} \int \frac{t^2+1}{t^2+3t+2}\,dt &= \int \left(1 - \frac{3t+1}{t^2+3t+2} \right) dt \\ &= t - \int \frac{3t+1}{t^2+3t+2}\,dt \\ &= t - (5\ln|t+2| - 2\ln|t+1| + C) \\ &= t - 5\ln|t+2| + 2\ln|t+1| + C \end{aligned}$$

Question 2: [Total 8 pts]

Déterminez si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. Pour tous ceux qui **converge** donnez sa valeur.

a) [4 pts] $\displaystyle\int_3^5 \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

Solution :

- Puisque $\sqrt{x^2-9}$ est 0 lorsque $x = 3$, cette intégrale est impropre.
- Alors, on calcul
$$\int_3^5 \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx = \lim_{a\to 3^+}\int_a^5 \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$$
- On commence en trouvant
$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$$
par substitution.
- On pose $w = x^2 - 9$.
- Alors, $\frac{dw}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dw}{2x}$.
- Donc,
$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx &= \int \frac{2x}{(w)^{1/2}}\left(\frac{dw}{2x}\right)\\ &= \int w^{-1/2}\,dw\\ &= \frac{w^{1/2}}{1/2} + C\\ &= 2w^{1/2} + C\\ &= 2\sqrt{x^2-9} + C\end{aligned}$$
- Ainsi,
$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx &= \lim_{a\to 3^+}\int_a^5 \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx\\ &= \lim_{a\to 3^+}\left(2\sqrt{x^2-9}\Big]_a^5\right)\\ &= \lim_{a\to 3^+}\left(2\sqrt{(5)^2-9} - 2\sqrt{(a)^2-9}\right)\\ &= 2\sqrt{16} - 0\\ &= 2(4) = 8\end{aligned}$$
- Alors cette intégrale impropre converge vers la valeur 8.

b) [4 pts] $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{3x}\,dx$

Solution :

- Puisque la limite supérieure est ∞, cette intégrale est impropre.
- Alors, on calcul

$$\int_0^{\infty} xe^{3x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{3x}\,dx$$

- On commence en trouvant

$$\int xe^{3x}\,dx$$

  par partie.
- On pose $u = x$ et $dv = e^{3x}\,dx$.
- Alors, $du = dx$ et $v = \frac{e^{3x}}{3}$.
- Donc,

$$\begin{aligned}
\int xe^{3x}\,dx &= (x)\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) - \int\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)(dx) \\
&= \frac{1}{3}xe^{3ex} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx \\
&= \frac{1}{3}xe^{3ex} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}xe^{3ex} - \frac{1}{9}e^{3x} + C = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^{3x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{3x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\left(x-\frac{1}{3}\right)\Big]_0^b\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\left(\frac{1}{3}e^{3b}\left(b-\frac{1}{3}\right)\right) - \left(\frac{1}{3}e^{3(0)}\left((0)-\frac{1}{3}\right)\right)\right) \\
&= \infty + \frac{1}{9} = \infty
\end{aligned}$$

- Alors, cette intégral impropre diverge.

Question 3: [Total 7 pts]

Trouvez l'aire total entre l'axe des x et la fonction au-dessus de l'interval $[0, \pi]$.

$$f(x) = 3\cos x\sqrt{1-\sin x}$$

Solution :

- On trouve les racines de la fonction :

$$3\cos x\sqrt{1-\sin x} = 0$$

- Ceci mène à deux équation:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{seule solution dans } [0, \pi]$$

et

$$\sqrt{1-\sin x} = 0 \Rightarrow 1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{seule solution dans } [0, \pi]$$

- Les racines divisent l'intervalle données en deux sous-intervalles:

$$[0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

- On intègre la fonction sur chaque sous-intervalle:

$$\int_0^{\pi/2} 3\cos x\sqrt{1-\sin x}\,dx \text{ et } \int_{\pi/2}^{\pi} 3\cos x\sqrt{1-\sin x}\,dx$$

- Pour ce faire, on trouve l'intégrale indéfinie associée

$$\int 3\cos x\sqrt{1-\sin x}\,dx$$

par substitution.

- On pose $w = 1 - \sin x$.
- Alors, $\frac{dw}{dx} = -\cos x \Rightarrow dx = \frac{dw}{-\cos x}$.
- Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int 3\cos x\sqrt{1-\sin x}\,dx &= \int 3\cos x\sqrt{w}\left(\frac{dw}{-\cos x}\right) \\
&= -3\int w^{1/2}\,dw \\
&= -3\left(\frac{w^{3/2}}{3/2}\right) + C \\
&= -3\left(\frac{2}{3}w^{3/2}\right) + C \\
&= -2\,(1-\sin x)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

- Alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} 3\cos x\sqrt{1-\sin x}\,dx &= \left[-2\,(1-\sin x)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \left(-2\,(1-\sin(\pi/2))\right) - \left(-2\,(1-\sin(0))\right) \\
&= 0+2=2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{\pi} 3\cos x\sqrt{1-\sin x}\,dx &= \left[-2\,(1-\sin x)\right]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \left(-2\,(1-\sin(\pi))\right) - \left(-2\,(1-\sin(\pi/2))\right) \\
&= -2+0=-2
\end{aligned}$$

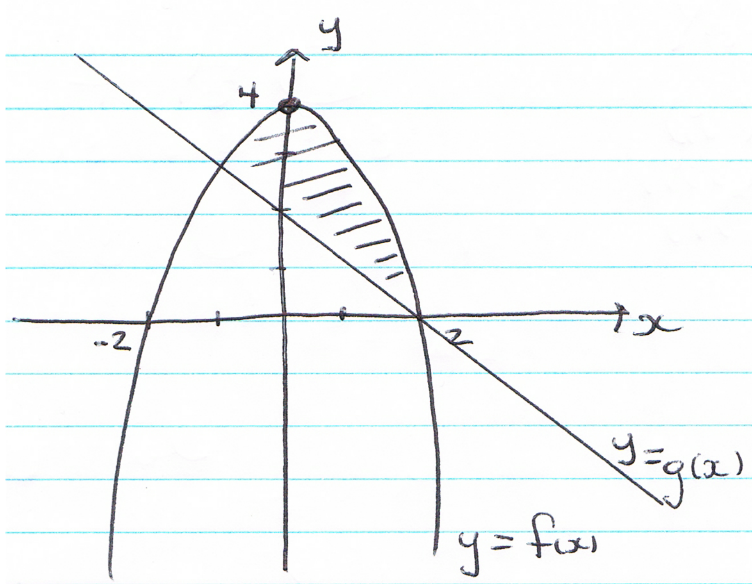
- Ainsi, l'aire totale

$$A_T = |2| + |-2| = 4.$$

Question 4: [Total 5 pts]

Trouvez le volume du solide de révolution formé en tournant la région bornée par les courbes $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = 2 - x$ autour de l'axe des x. **Solution :**

- Le graphe de cette situation est donné par le diagram :



- On trouve les points d'intersection des deux fonctions :

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 4 - x^2 &= 2 - x \\ 0 &= x^2 - x - 2 \\ 0 &= (x-2)(x+1) \end{aligned}$$

- Alors, il y a deux points d'intersection :

$$x = 2 \text{ et } x = -1.$$

- Alors, la région bornée par les fonctions se retrouve sur l'intervalle $[-1, 2]$.
- On constate que, sur cette intervalle, $f(x) \geq g(x)$, puisque $f(0) = 4$ et $g(0) = 2$ (ou en analysant le graphe ci-dessus).
- Puisque la région borné ne touche pas toujours à l'axe de rotation, nous utilisons la méthode des anneaux.
- Ainsi, l'intégrale qu'one cherche à calculer est :

$$\int_{-1}^{2} \pi \left(R^2(x) - r^2(x)\right)\, dx$$

où $R(x)$ est le rayon extérieure et $r(x)$ est le rayon intérieure.

- Par le graphe on observe que $R(x) = f(x) = 4 - x^2$ et $r(x) = g(x) = 2 - x$.
- Donc, l'intégrale devient :

$$
\begin{aligned}
& \int_{-1}^{2} \pi \left((4 - x^2)^2 - (2 - x)^2 \right) \, dx \\
= \quad & \pi \int_{-1}^{2} \left((16 - 8x^2 + x^4) - (4 - 4x + x^2) \right) \, dx \\
= \quad & \pi \int_{-1}^{2} x^4 - 9x^2 + 4x + 12 \, dx \\
= \quad & \left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 + 2x^2 + 12x \right]_{-1}^{2} \\
= \quad & \pi \left(\left(\frac{(2)^5}{5} - 3(2)^3 + 2(2)^2 + 12(2) \right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} - 3(-1)^3 + 2(-1)^2 + 12(-1) \right) \right) \\
= \quad & \pi \left(\frac{33}{5} + 15 \right) = \frac{108\pi}{5}
\end{aligned}
$$

Question 5: [Total 5 pts]

Résolvez le problème au valeur intiale suivant à l'aide de la méthode de séparation des variables. (Vous ne devez pas isolez la variable h dans votre solution.)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{he^t}{1+h}, \qquad \text{où } h(0) = 100$$

Solution :

- On doit séparer les variables :

$$\frac{1+h}{h}\,dh = e^t\,dt$$

- On intègre les deux côté

$$\begin{aligned} \int \frac{1+h}{h}\,dh &= \int e^t\,dt \\ \int \left(\frac{1}{h}+1\right) dh &= e^t + C \\ \ln|h| + h &= e^t + C \end{aligned}$$

- On utilise la condition initiale $h(0) = 100$ pour déterminer la constante d'intégration C :

$$\begin{aligned} \ln|h| + h &= e^t + C \\ \ln|(100)| + (100) &= e^{(0)} + C \\ \ln(100) + 100 &= 1 + C \\ \ln(100) + 99 &= C \end{aligned}$$

- Alors, la solution finale est

$$\ln|h| + h = e^t + \ln(100) + 99$$

Question 6: [Total 9 pts]

Rappelez-vous que la loi de Newton nous dis que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence de température entre un objet et l'air. Autrement dit, on a l'équation différentielle suivante

$$\frac{dT}{dt} = k(M - T)$$

où T est température de l'objet au temps t, M la température ambiante et k est la conductivité du corps et de son environement.

Une tasse de café dont la température est de 60°C est laissée dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 22°C.

a) D'après la Loi de Newton, quelle est l'équation différentielle satisfaite par la température $T(t)$ du café au temps t ? (Il va y avoir une constante inconnue dans votre équation différentielle.)

Solution :

$$\frac{dT}{dt} = k(22 - T), \qquad T(0) = 60$$

(b) Résolvez l'équation différentielle que vous avec trouvez en (a).

Solution :

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= k(22 - T) \\
\frac{dT}{22 - T} &= k\,dt \\
\int \frac{dT}{22 - T} &= \int k, dt \\
-\ln|22 - T| &= kt + C \\
\ln|22 - T| &= -kt + C \\
|22 - T| &= e^{-kt+C} \\
|22 - T| &= Ae^{-kt} \\
22 - T &= Ae^{-kt} \\
T &= 22 - Ae^{-kt}
\end{aligned}$$

Puisque $T(0) = 60$:

$$\begin{aligned}
(60) &= 22 - Ae^{-k(0)} \\
60 &= 22 - A(1) \\
38 &= -A \\
-38 &= A
\end{aligned}$$

Donc,

$$T = 22 - (-38)e^{-kt} = 22 + 38e^{-kt}$$

(c) Si la température du café est de 40°C après 20 minutes, quelle est la température du café après une heure ?

Solution : Puisque $T(20) = 40$:

$$\begin{aligned}
(40) &= 22 + 38e^{-k(20)} \\
18 &= 38e^{-20k} \\
\frac{18}{38} &= e^{-20k} \\
\frac{9}{19} &= e^{-20k} \\
\ln\left(\frac{9}{19}\right) &= -20k \\
k &= -\frac{\ln\left(\frac{9}{19}\right)}{20} \approx 0,03736072
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
T(60) &= 22 + 38e^{\frac{\ln\left(\frac{9}{19}\right)}{20}(60)} \\
&= 22 + 38e^{3\ln\left(\frac{9}{19}\right)} \\
&= 22 + 38\left(\frac{9}{19}\right)^3 \approx 26,04°\text{C}
\end{aligned}$$

Page supplémentaire pour brouillon