# Devoir 5 - Solutions

MAT 1732 B, Hiver 2013

Instructeur : Abdelkrim El basraoui

Question 1. Étant donné les matrices et les vecteurs suivants :

$$A=\begin{bmatrix}0&2&-3\\2&1&6\\0&3&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&-1&5\\2&3&4\end{bmatrix},\ \mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-2\\0\\5\end{bmatrix},\ \mathbf{w}=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix},$$

calculez, si possible, les expressions suivantes. Si l'expression n'est pas bien définie, expliquez en une phrase pourquoi.

(a) $3\mathbf{v}+2B^T\mathbf{w}$,

**Solution:** $3\mathbf{v}$ est une matrice colonne de type $(3,1)$, tandis que $2B^T\mathbf{w}$ est une matrice colonne de type $(2,1)$, alors elles ne peuvent pas être additionnées.

(b) $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$,

**Solution:** $\mathbf{u}\mathbf{v}^T=\begin{bmatrix}-4&0&10\\2&0&-5\end{bmatrix}$.

(c) $A^TB+2\mathbf{v}^T\mathbf{w}$,

**Solution:** N'est pas faisable car $BA^T$ est une matrice de type $(2,3)$, tandis que $2\mathbf{v}^T\mathbf{w}$ est une matrice de taille $(1,1)$, alors elles ne peuvent pas être additionnées.

(d) $AB$,

**Solution:**N'est pas faisable car le nombre de colonnes de $A$ est $3\neq 2$ le nombre de lignes de $B$.

(e) $B\mathbf{v}$,

**Solution:** $\begin{bmatrix}25\\16\end{bmatrix}$.

(f) $BA$,

**Solution:** $BA=\begin{bmatrix}-2&14&14\\6&19&28\end{bmatrix}$.

(g) $\det(A^2)$.

**Solution:** Méthode 1:

on a $A^2=\begin{bmatrix}4&-7&0\\2&23&24\\6&15&34\end{bmatrix}$, et donc selon la 3eme colonne on a $\det(A^2)=1156$.

De même, $\det(A)=-34$, alors $\det(A^2)=\det(AA)=\det(A)\det(A)=(-34)^2=1156$. (Souvenez-vous, ceci fonctionne avec les produits mais pas avec les sommes).

QUESTION 2. Considérez le système d'équations linéaires

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & ax_3 & = & b \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \end{array}$$

**Solution:**Nous allons réduire la matrice par rapport aux lignes à sa forme échelonnée.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & a & b \\ 3 & 7 & 5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 4L_1} \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-12 & b-8 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & a-12 & b-8 \end{array}\right]$$

(a) Pour avoir une infinité de solution il faut que

- Le système est compatible s'il n'y a pas de pivot dans la dernière colonne et avoir au moins une variable libre.
- La seul possibilité de ne pas avoir un pivot est seulement dans la dernière colonne, la troisième ligne.
- Donc, il faut que $a-12$ ne soit pas un pivot $a-12=0 \iff a=12$ (pour avoir une variable libre) et que $b-8=0 \iff b=8$ pour que le système soit compatible.
- Ainsi, $a=12$ et $b=8$.

(b) Le système admet une solution unique.

- Il faut dans ce cas avoir le même nombre de pivots que de variables. Donc $a-12$ doit être un pivot; i.e. $a-12 \neq 12 \iff a \neq 12$ la valeur de $b$ est quelconque.
- Alors $a \neq 12,\ b$ quelconque.

(c) Pour aucune solution, il faut que la dernière colonne soit une colonne pivot.

- Donc $a-12$ ne doit pas etre un pivot, i.e $a=12$, et $b-8$ est un pivot, i.e $b-8 \neq 0 \iff b \neq 8$
- Ainsi $a = 12 \textit{ et } b \neq 8$.

(d) Nous pouvons commencer avec la forme échelonnée obtenu dans la partie (a) avec $a=12,\ b=8$ et la réduire davantage à sa forme échelonnée réduite.

$$\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & a-12 & b-8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Les colonnes pivots sont la première et la deuxième. Les variables de base sont donc $x_1$ et $x_2$ et $x_3$ est une variable libre. Le système correspondant est

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + 11x_3 = 10 \\ x_2 - 4x_3 = -4 \\ x_3 \ \textit{libre} \end{array}\right.$$

Donc $x_1 = 10 - 11x_3,\ x_2 = -4 + 4x_3,\ x_3$ libre.
La solution générale est $(x_1, x_2, x_3) = (10 - 11x_3, -4 + 4x_3, x_3)$, avec $x_3 \in \mathbb{R}$.

Question 3. (a) Considérez le système d'équations linéaires

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array}$$

**Solution:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3/2L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & -4 & -5 & -11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 4/3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to 3L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \to L_2 + 4L_3 \\ L_1 \to L_1 - L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -1/3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to 1/2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

La matrice est maintenant échelonnée réduite.

(b) Donnez l'ensemble solution de ce système.

**Solution:**

- Nous pouvons déterminer l'ensemble solution de la matrice échelonnée réduite.
- De la première ligne $x_1 = 0$.
- De la deuxième ligne $x_2 = 4$.
- De la troisième ligne $x_3 = -1$.
- Aors, la seule solution du système est $(x_1, x_2, x_3) = (0, 4, -1)$.

Question 4. (a) Déterminez les valeurs propres complexes de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Solution:** Les valeurs propres de $A$ sont les racines du polynôme caractéristique de $A$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda)\det(A - \lambda I_2) &= 0 \\ \therefore (1-\lambda)(3-\lambda) - 5(-2) &= 0 \\ \therefore \lambda^2 - 4\lambda + 13 &= 0 \\ \therefore \lambda &= 2 \pm 3i. \end{aligned}$$

(b) Pour la valeur propre avec partie imaginaire positive trouvé en (a), déterminez un vecteur propre de $A$ associé à cette valeur propre.

**Solution:**

- On doit résoudre le système $(A - \lambda I_2)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, où $\lambda = 2 + 3i$.

$$[A - \lambda I_2 | \overrightarrow{0}] = \left[\begin{array}{rr|r} -1-3i & -2 & 0 \\ 5 & 1-3i & 0 \end{array}\right]$$

- Pour échelonner cette matrice on éffecture les opérations suivantes

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1-3i & -2 & 0 \\ 5 & 1-3i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{rr|r} 5 & -1-3i & 0 \\ -1-3i & -2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - (-1-3i)/5L_1} \left[\begin{array}{lr|r} 5 & -1-3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_1 \to 1/5L_1} \left[\begin{array}{lr|r} 1 & -1/5 - i3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- La matrice est maintenant échelonée réduite.
- Si notre vecteur propre est
$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
alors on a $x_2$ est libre et $x_1 + (-1/5 - i3/5)x_2 = 0$, ainsi $x_1 = (1/5 + 3i/5)x_2,\ x_2$ libre.

- Donc l'espace propre associé est $E_{2+3i} = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} 1/5 + 3i/5 \\ 1 \end{bmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.
- Donc un vecteur propre associé à $\lambda = 2 + 3i$ est

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1/5 + 3i/5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

  et tout autre vecteur propre est un multiple de celui-ci.
- On peut vérifier notre réponse :

$$A\overrightarrow{v} = (2 + 3i)\overrightarrow{v}.$$