Devoir 4 - Solutions

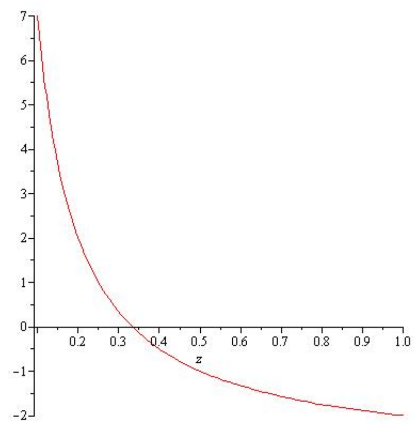
MAT 1732 B, Hiver 2012

Instructeur : Abdelkrim El basraoui

Question 1. Considérez l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} - 3.$$

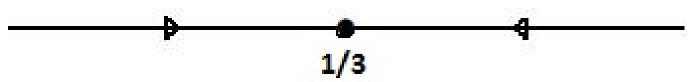
(a) Graphez le taux de variations sur l'intervalle $0 < z \leq 1$.



(b) Dessinez le portrait de phase.

Solution

- D'après le graphe de la partie (a), on peut dessiner le portrait de phase suivant :



Question 2.

$$z = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i.$$

(a) Trouvez le conjugé de z, i.e. $\overline{z}$.
Solution: $\overline{z} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}i.$
(b) Déterminez le module de z, i.e. $|z|$.
Solution :

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(1/3)^2 + (\sqrt{2}/3)^2} \\ &= \sqrt{1/9 + 2/9} \\ &= \sqrt{3/9} \\ &= 1/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

(c) Trouvez l'inverse de z, i.e. z^{-1}.
Solution :

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} \\ &= \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right) \\ &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i}{1/3} \\ &= 1 + \sqrt{2}i \end{aligned}$$

Question 3. Considérez l'équation différentielle autonome

$$\frac{dy}{dt} = ye^{-\beta y} - \alpha y = y(e^{-\beta y} - \alpha)$$

avec $\alpha > 1$ et $\beta < 0$.
(a) Trouvez les points d'équilibre.

Solution :

- Pour trouver les équilibres, il faut déterminer les valeurs de y pour que $\frac{dy}{dt} = 0$.

$$\begin{aligned} y(e^{-\beta y} - \alpha) &= 0 \\ y &= \begin{cases} 0 \\ \frac{-\ln(\alpha)}{\beta} \end{cases} \end{aligned}$$

- Il y a deux points d'équilibre, notament en $y = 0$ et en $y = \frac{-\ln(\alpha)}{\beta}$.

(b) Déterminez la stabilité de chacun des points d'équilibre.

Solution :

- Pour trouver la stabilité des points d'équilibre, il faut premièrement déterminer la dérivée de $\frac{dy}{dt}$ par rapport à y.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\left[\frac{dy}{dt}\right] &= \frac{d}{dy}\Big(y(e^{-\beta y}-\alpha)\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-\beta y}-\alpha-y\beta\mathrm{e}^{-\beta y} \end{aligned}$$

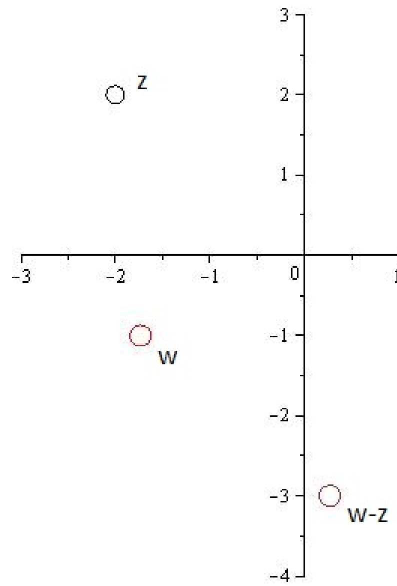
- Ensuite, on évalue cette dérivée en chacun des points d'équilibre.
  - Pour $y=0$, on obtient $1-\alpha<0$ car $\alpha>1$. Alors, $y=0$ est stable.
  - Pour $y=-\ln(\alpha)/\beta$, on a $\alpha\ln(\alpha)>0$ car $\alpha>1$ et donc $\ln(\alpha)>\ln(1)=0$ puisque $\ln(x)$ est une fonction croissante. Alors, $y=-\ln(\alpha)/\beta$ est instable.

QUESTION 4. Considérez les nombres complexes $z = -2 + 2i$ et $w = -\sqrt{3} - i$.

(a) Graphez z, w et leur différence $w - z$ sur le plan cartésien xOy.

$$w - z = (2 - \sqrt{3}) - 3i$$

Solution :



(b) Exprimez z et w en forme polaire, en déduire celle de leur produit, i.e. zw.

Solution :

- On calcul le module et l'argument de z.
  - Pour z on a $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.
  - Comme z est dans le 2eme quadrant on a $arg(z) = \pi - \arctan\left|-\frac{-2}{2}\right| = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.
  - Alors,
  $$z = \sqrt{8}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)).$$
- On a aussi besoin de calculer le module et l'argument de w.
  - $|w| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.
  - On a w est dans le 3eme quadrant et donc $arg(w) = \pi + \arctan\left|-\sqrt{3}/(-1)\right| = 4\pi/3$.
  - d'où
  $$w = 2\left(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)\right).$$
- Pour produit on utilisera le fait que $arg(wz) = arg(z) + arg(w)$, $|wz| = |z||w|$ et que les fonctions cos et sin sont périodiques avec période 2π
$$\begin{aligned} zw &= 2\sqrt{8}\left(\cos(3\pi/4 + 4\pi/3) + i\sin(3\pi/4 + 4\pi/3)\right) = 2\sqrt{8}\left(\cos(25\pi/12) + i\sin(25\pi/12)\right) \\ &= 2\sqrt{8}\left(\cos(\pi/12 + 2\pi) + i\sin(\pi/12 + 2\pi)\right) = 2\sqrt{8}\left(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)\right) \ . \end{aligned}$$

QUESTION 5. Exprimez les nombres complexes suivants en forme d'Euler (avec $\theta \in [0, 2\pi[$) :

(a) 5-5i;

Solution :

- Module: $|5-5i| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,
- Argument: (on est dans le 4eme) $\theta = 2\pi - \arctan|5/(-5)| = \frac{7\pi}{4}$
- Alors,
$$5 - 5i = 5\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

(b) 2013i;

- Module: $|2013i| = 2013$.
- Argument: $\theta = \pi/2$ car ce nombre est purment imaginaire avec partie imaginaire positive.
- Donc $2013i = 2013e^{\pi i/2}$

(c) 2013;

- Module: $|2013| = 2013$.
- Argument: $\theta = 0$ car ce nombre est purment réèl avec partie réèlle positive.
- Donc $2013 = 2013e^{0i}$

(d) $1 + \sqrt{3}i$.

- Module: $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$,
- Argument: (on est dans le 1er quadrant) $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$.
- Alors, $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.