

## Devoir 3 - Solution

MAT 1732 B, Hiver 2013

Professeur : Abdelkrim El basraoui

QUESTION 1. Supposez qu'une tortue croît selon l'équation

$$\frac{dL}{dt} = 5e^{-0.1t},$$

où  $L(t)$  est la longueur de la tortue (en cm) après  $t$  années. À sa naissance, la tortue mesurait 3 cm.

(a) Est-ce ceci une équation différentielle pure ou autonome ?  
C'est une équation différentielle pure.

(b) Trouvez la solution générale de cette équation différentielle.

- Séparation: on a  $dL = 5e^{-0.1t} dt$
- Intégration et solution générale:

$$\begin{aligned}\int dL &= 5 \int e^{-0.1t} dt \\ L(t) &= -50e^{-0.1t} + C\end{aligned}$$

(c) Trouvez la solution particulière de cette équation différentielle selon la condition initiale donnée.

- Trouver  $C$ : avec la C.I. on a  $L(0) = 3$  ce qui équivaut à  $-50 + C = 3$ , soit  $C = 47$ .
- Conclusion: la solution qui satisfait  $L(0) = 3$  est  $L(t) = 47 - 50e^{-0.1t}$ .

(d) Déterminez la longueur de la tortue après 10 ans ( $L(10)$ ) et après 20 ans ( $L(20)$ ). De combien la tortue grandira-t-elle entre les âges de  $t = 10$  et  $t = 20$  ?

- $L(10) = 47 - 50e^{-1} \simeq 28.6$ ;  $L(20) = 47 - 50e^{-2} \simeq 40.2$ .
- La tortue grandira de  $L(20) - L(10) \simeq 11.6$  cm entre 10 et 20 ans.

(e) Déterminez de combien la tortue grandira-t-elle entre les âges de  $t = 10$  et  $t = 20$  en utilisant le théorème fondamental du calcul.

Avec le T.F.C. la tortue grandira de

$$\int_{10}^{20} \frac{dL}{dt} dt = [47 - 50e^{-0.1t}]_{10}^{20} \simeq 11.6 \text{ cm}$$

QUESTION 2. Considérez l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + 4$$

(a) Est-ce ceci une équation différentielle pure ou autonome ?

C'est une équation différentielle autonome car  $y^2 + 4$  ne dépend pas implicitement de  $t$ .

(b) Trouvez la solution de l'équation différentielle qui satisfait la condition initiale  $y(0) = 2$ .

• Séparation: on a  $\frac{dy}{y^2 + 4} = dt$

• Intégration: après substitution  $u = y/2$

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y^2 + 4} &= \int dt \\ \frac{1}{4} \int \frac{dy}{(y/4)^2 + 1} &= t + C \\ \frac{1}{2} \int \frac{dU}{U^2 + 1} &= t + C \\ \frac{1}{2} \arctan(U) &= t + C \\ \arctan(y/2) &= 2t + C\end{aligned}$$

• Isolation de  $y$ : on a donc  $y/2 = \tan(2t + C)$ , soit  $y(t) = 2 \tan(2t + C)$

• Trouver  $C$ : avec la C.I. on a  $y(0) = 2$  ce qui équivaut à  $2 \tan(C) = 2$ , soit  $\tan(C) = 1$  et donc  $C = \arctan(1) = \pi/4$ .

• Conclusion: la solution qui satisfait  $y(0) = 2$  est  $y(t) = 2 \tan(2t + \pi/4)$ .

QUESTION 3. Une patate douce est placée dans un four. La patate douce se réchauffe selon l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(200 - T).$$

Le four est gardé à une température de  $200^\circ\text{C}$ .

(a) Si la patate douce est  $20^\circ\text{C}$  lorsqu'elle est placée dans le four, résolvez l'équation différentielle (votre réponse devrait contenir la constante  $\alpha$ ).

- Séparation: on a  $\frac{dT}{200 - T} = \alpha dt$
- Intégration:

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{200 - T} &= \int \alpha dt \\ -\ln|200 - T| &= \alpha t + C \\ |200 - T| &= e^{-\alpha t + C} \\ 200 - T &= \pm e^C e^{-\alpha t} \\ T &= 200 - D e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

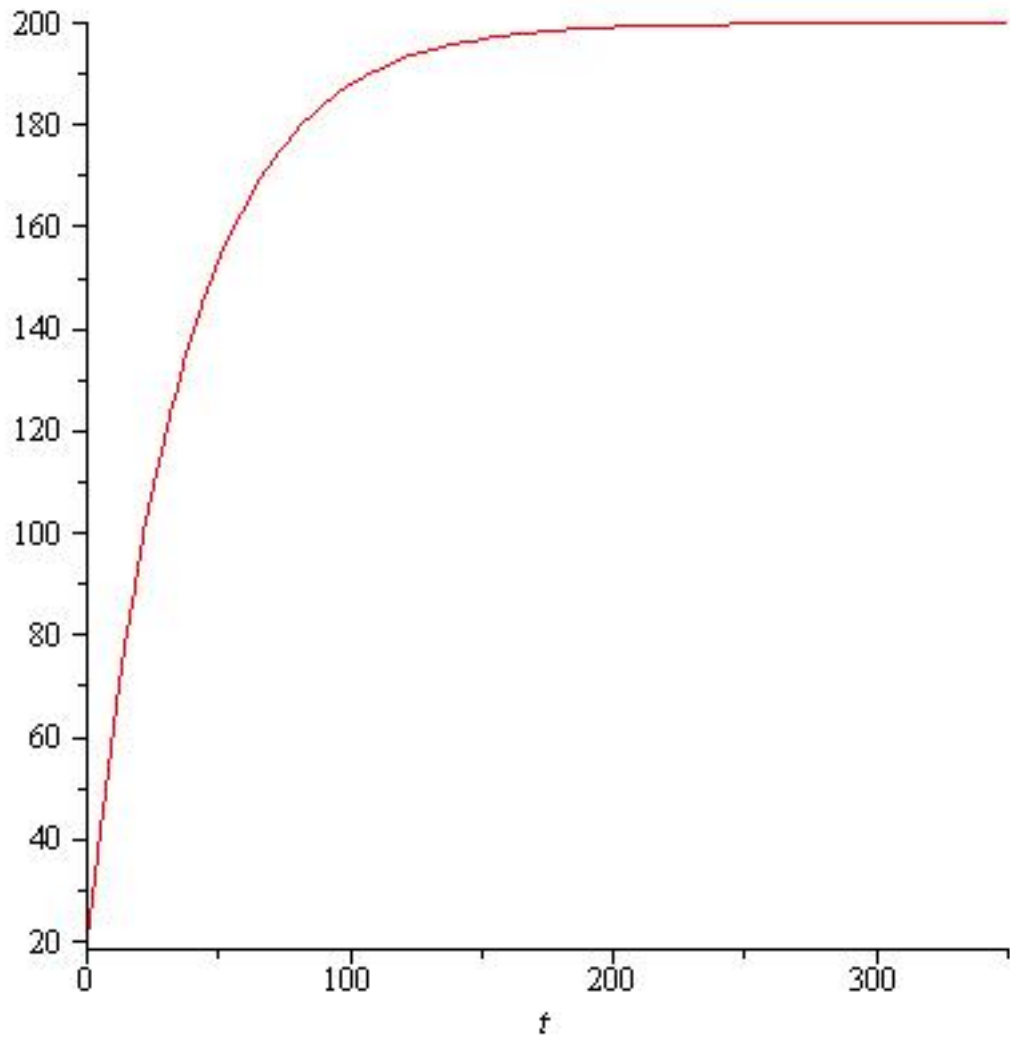
où  $D = \pm e^C$ .

- Trouver  $D$ : avec la C.I. on a  $T(0) = 20$  ce qui équivaut à  $D = 200 - 20 = 180$ .
- Conclusion: la solution qui satisfait  $T(0) = 20$  est  $T(t) = 200 - 180e^{-\alpha t}$ .

(b) Déterminez  $\alpha$  en utilisant le fait qu'après 30 minutes la température de la patate douce est  $120^\circ\text{C}$ . Si le temps est en minutes, on aura  $T(30) = 120$  et donc

$$\begin{aligned} 200 - 180e^{-\alpha 30} &= 120 \\ (200 - 120)/180 &= e^{-\alpha 30} \\ \ln(4/9) &= -\alpha 30 \\ \alpha &= \frac{-1}{30} \ln(4/9). \end{aligned}$$

(c) En utilisant les valeurs de les parties (a) et (b), esquissez le graphe de la solution  $T(t)$ .



QUESTION 4. (a) Trouvez la solution générale de l'équation différentielle séparable

$$y' = e^{-2t}(1 + y^2).$$

Notez que cette équation différentielle n'est ni pure ni autonome.

- Séparation: on a  $\frac{dy}{y^2 + 1} = e^{-2t} dt$

- Intégration:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y^2 + 1} &= \int e^{-2t} dt \\ \arctan(y) &= \frac{-1}{2}e^{-2t} + C\end{aligned}$$

- Isolation de  $y$ : on a donc  $y(t) = \tan(\frac{-1}{2}e^{-2t} + C)$ .

(b) Trouvez la solution particulière qui satisfait la condition initiale  $y(0) = 0$ .

- Trouver  $C$ : avec la C.I. on a  $y(0) = 0$  ce qui équivaut à  $\tan(C - 1/2) = 0$ , soit  $C - 1/2 = \arctan(0) = 0$  et donc  $C = 1/2$ .

- Conclusion: la solution qui satisfait  $y(0) = 0$  est  $y(t) = \tan(\frac{-1}{2}e^{-2t} + 1/2)$ .

QUESTION 5. (a) Trouvez la solution générale de l'équation différentielle séparable

$$y' = y \sin(\pi t).$$

Notez que cette équation différentielle n'est aussi ni pure ni autonome.

- Séparation: on a  $\frac{dy}{y} = \sin(\pi t)dt$

- Intégration:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= \sin(\pi t)dt \\ \ln |y| &= \frac{-1}{\pi} \cos(\pi t) + C\end{aligned}$$

- Isolation de  $y$ : on a donc  $y(t) = \pm e^C e^{\frac{-1}{\pi} \cos(\pi t)} = D e^{\frac{-1}{\pi} \cos(\pi t)}$ , où  $D = \pm e^C$ .

(b) Trouvez la solution particulière qui satisfait la condition initiale  $y(1) = 1$ .

- Trouver  $D$ : avec la C.I. on a  $y(1) = 1$  ce qui équivaut à  $D e^{\frac{-1}{\pi} \cos(\pi)} = 1$ , soit  $D = e^{\frac{1}{\pi}}$ .
- Conclusion: la solution qui satisfait  $y(1) = 1$  est  $y(t) = e^{\frac{-1}{\pi}(\cos(\pi t)+1)}$ .