

Devoir 2 - Solution

MAT 1732 B, Hiver 2013

Professeur : Abdelkrim El basraoui

QUESTION 1. Évaluer l'intégrale $\int \frac{1}{x^2 + 4x - 5} dx$.

On a $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$. Donc pour calculer cette intégrale on utilisera les fractions partielles. On a alors

$$\frac{1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 5} \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 4x - 5} dx &= \frac{1}{6} \left(\int \frac{dx}{x - 1} - \int \frac{dx}{x + 5} \right) + C \\ &= \frac{1}{6} (\ln|x - 1| - \ln|x + 5|) = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 5} \right| + C \end{aligned}$$

QUESTION 2. Évaluer l'intégrale $\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} dx$.

On a $x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1) - 3x$ et donc

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = (x + 1) - 3 \frac{x}{x^2 + x + 1} .$$

Donc

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \int (x + 1) dx - 3 \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = x^2/2 + x - 3I,$$

où $I = \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$. Pour I , on a en utilisant le fait que $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, et que $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$

$$I = \int \frac{x + 1/2 - 1/2}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{x + 1/2}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx.$$

Une I.P.S. avec $u = x^2 + x + 1 \Rightarrow du = 2(x + 1/2)dx \Leftrightarrow dx = du/2(x + 1/2)$ nous donne après simplification

$$I = \frac{1}{2} \int du/u - \frac{2}{3} \int \frac{1}{((2x + 1)/\sqrt{3})^2 + 1} dx.$$

Une nouvelle I.P.S. pour la 2eme intégrale avec $v = 2(x + 1)/\sqrt{3}$ donnera

$$I = \frac{1}{2} \ln|x^2 + x + 1| - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan((2x + 1)/\sqrt{3}) \right) + C .$$

D'où, on a après simplification

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} dx = x^2/2 + x - \frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{\arctan}((2x + 1)/\sqrt{3}) + C .$$

QUESTION 3. Déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent.

(a) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(x)}{(\cos^3(x))} dx.$

• Domaine: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\pi/2 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Donc on a un problème à $\pi/2$

• Primitive: un I.P.S. avec $u = \cos(x)$ nous donne $\int \frac{\sin(x)}{(\cos^3(x))} dx = \frac{1}{2 \cos^2(x)} + C.$

• Intégration: $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(x)}{(\cos^3(x))} dx = \lim_{l \rightarrow \pi/2^+} \int_l^{\pi} \frac{\sin(x)}{(\cos^3(x))} dx = \lim_{l \rightarrow \pi/2^+} \left(\frac{1}{2 \cos^2(\pi)} - \frac{1}{2 \cos^2(l)} \right) = -\infty$, car $\lim_{l \rightarrow \pi/2^+} \frac{1}{2 \cos^2(l)} = \infty.$

• Conclusion: cette intégrale impropre diverge.

(b) $\int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx.$

• Domaine: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/3\}$. Donc on a un problème à $1/3$

• Primitive: un I.P.S. avec $u = \sqrt{3x-1}$ nous donne $\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx = \frac{2\sqrt{3x-1}}{3} + C.$

• Intégration: $\int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx = \lim_{l \rightarrow 1/3^+} \int_l^{1/2} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx = \lim_{l \rightarrow 1/3^+} \left(\frac{2\sqrt{1/2}}{3} - \frac{2\sqrt{3l-1}}{3} \right) = \sqrt{2}/3.$

• Conclusion: Cette intégrale impropre converge vers $\sqrt{2}/3.$

QUESTION 4. Calculer le volume du solide de révolution de la région bornée par les courbes

$$f(x) = x^2 + 2x - 4, \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2$$

quand l'axe de rotation est:

(a) Tout d'abord $f(x) = g(x)$ quand $(2x^2 + 2x - 4 = 0)$ $x = -2$ ou $x = 1$. Aussi, on a $R(x) = |-x^2| = x^2$ et $r(x) = |x^2 + 2x - 4| = 4 - 2x - x^2$ car f et g sont à valeurs négatives. Donc $A(x) = \pi(R(x)^2 - r(x)^2)$ et d'où

$$V = \int_{-2}^1 A(x) dx = 45\pi .$$

(b) De même, on a $R(x) = 1 + |x^2 + 2x - 4| = 1 + 4 - 2x - x^2$ et $r(x) = 1 + |-x^2| = 1 + x^2$.
Donc

$$V = \int_{-2}^1 \pi(R(x)^2 - r(x)^2) dx = 63\pi .$$

Les régions on été donné en classe!!!