Devoir 1 - Solution

MAT 1732 B, Hiver 2013

Professeur : Abdelkrim El basraoui

QUESTION 1. Calculez $\int_1^2 x^4 \ln(x^3)dx$.

- Primitive: une I.P.P.avec $u = \ln(x)\,, v' = x^4 \Longrightarrow dx = xdu\,, v = x^5/5$. On obteint, après simplification

$$\int x^4 \ln(x)dx = \frac{x^5}{5}\ln(x) - \int x^5/5x\,dx = \frac{x^5}{5}\ln(x) - \frac{x^5}{25} + C$$

- Évaluation: $\int_1^2 x^4 \ln(x)dx = [\frac{x^5}{5}\ln(x) - \frac{x^5}{25}]_1^2 = -31/25 + (32.ln(2))/5$.

QUESTION 2. Calculez $\int 6\sin(30x+40)dx$.

Une substitution $u = 30x + 40$ donne $du = 30dx$ et, après avoir sortit le 6, on a

$$6\int \sin(u)du/30 = \frac{6}{30}\int \sin(u)du = \frac{-1}{5}\cos(u) + C = \frac{-1}{5}\cos(30x+40) + C$$

QUESTION 3. Calculez $\int_0^1 \arcsin z\,dz$.

- Primitive: On utilise en premier une intégration par parties avec $u = \arcsin(z)$, $v' = 1$ et donc $u' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, $v = z$. Donc on obtient

$$\int \arcsin(z)dz = z\arcsin(z) - \int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz$$

Pour cette dernière intégrale on utilise la substitution $w = 1 - z^2$ et donc $dz = -dw/2z$. Donc, après simplification, on a

$$\int \arcsin(z)dz = z\arcsin(z) - \int \frac{1}{2\sqrt{w}}dw$$

$$\int \arcsin(z)dz = z\arcsin(z) + \sqrt{w} + C = z\arcsin(z) + \sqrt{1-z^2} + C$$

- Évaluation: on a

$$\int_0^1 \arcsin(z)dz = [z\arcsin(z) + \sqrt{1-z^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Question 4. Trouvez l'aire de la région bornée par les graphes des fonctions $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^3$.

Voir notes du cours!!!

Question 5. Considérer la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$. Partitionner l'intervalle $[0, 1]$ en cinq sous-intervalles et évaluer

(a) la somme de Riemann par la droite, D_5 (utilisant les valeurs à l'extrèmité droite);

On a $\Delta x = \frac{1-0}{5} = 0.2$, $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + \Delta x = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$ et donc

$$D_5 = \sum_{i=1}^{5} \Delta x f(x_i) = 0.44.$$

(b) la somme de Riemann par la gauche, G_5 (utilisant les valeurs à l'extrèmité gauche);

Avec les valeurs dans (a) on a

$$G_5 = \sum_{i=0}^{4} \Delta x f(x_i) = 0.24$$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$;

On a $\int_0^1 x^2\,dx = [x^3/3]_0^1 = \frac{1}{3} = 0.333\cdots$

(d) Comparer vos réponses en (a), (b) et (c). Laquelle des sommes de Riemann sous-estime

On remarque

$$G_5 \leq \int_0^1 x^2 dx \leq D_5$$

Cette inégalité est vraie à cause que la fonction x^2 est croissante sur [0, 1].

Question 6. Déterminez si les intégrales impropres suivantes converges ou diverges. Dans le cas où elles convergent donnez leurs valeurs.

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\ln(x)}dx$, c'est une intégrale impropre de type I.

Domaine: On a $D =]0, 1[\cup]1, \infty[$. Donc la borne 1 constitue un problème.

Primitive: Une intégration par substitution (I.P.S.) avec $u = \ln(x)$ donne $dx = xdu$ et donc

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln(x)| + C\ .$$

Évaluation: Ici il faut utiliser la définition.

$$\int_1^e \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{l\to 1^+}\int_l^e \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{l\to 1^+}[\ln|\ln(x)|]_l^e = \lim_{l\to 1^+}\ln|\ln(l)| = -\infty \ .$$

Donc l'intégrale diverge.

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+1}dx$, c'est une intégrale de type II.

Domaine: On a $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. (Ici on sait que ∞ est la borne causant problème).

Primitive: Une I.P.S. avec $u = x+1$ et donc $du = dx$ donne

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int u^{-2}du = -u^{-1} + C = -\frac{1}{x+1} + C \ .$$

Évaluation: On a

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \lim_{u\to\infty}(-\frac{1}{u+1}+1) = 1 \ .$$

D'où l'intégrale converge vers la valeur 1.

Question 7. Supposez qu'une tortue croît selon l'équation

$$\frac{dL}{dt} = 5e^{-0.2t},$$

où $L(t)$ est la longueur de la tortue (en cm) après t années. À sa naissance, la tortue mesurait est de 6 cm.

(a) Trouvez l'expression de $L(t)$ et la longueur de la tortue après deux ans.
Intégration: on a, après I.P.S. ($u = -0.2t$), $L(t) = \int \frac{dL}{dt}\,dt = \int 5e^{-0.2t}\,dt = -25e^{-0.2t} + C$.
Condition initiale: on a $L(0) = 6cm$ donc on obtient

$$\begin{aligned} -25e^0 + C &= 6 \\ C &= 31 \end{aligned}$$

Conclusion: $L(t) = -25e^{-0.2t} + 31$
Après deux ans, on atteind la longueure de $L(2) = -25e^{-0.4} + 31 = 14.24\,cm$.
(b) De combien la tortue grandira-t-elle entre les âges de $t = 0$ et $t = 4$?
On a

$$\int_0^4 L'(t)\,dt = [-25e^{-0.2t} + 31]_0^4 \approx 13.77$$

.

On a $L(0) = 6$ et $L(4) \approx 19.77$. Donc la tortue grandira de $L(4) - L(0) \approx 13.77$ cm.