Logique et Mathématiques discrètes **(MAT1748 3X)**

Examen Partiel **(Été 2012)**

Prof. Joseph Khoury

durée: 80 minutes

NOM de famille: Solution.

Prénom: ______________________

Numéro d'étudiant: ______________________

- Aucune note n'est permise.
- Seules Les calculatrices non programmables sont permises
- Cet examen comporte 6 questions et 9 pages
- Vous devez répondre à toutes les questions
- Toutes les questions sont à développement et valent un total de 30 points
- Prenez soin de bien rédiger vos solutions
- Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les pages additionnelles à la fin si vous manquez d'espace

1. **[5 points]** Utiliser la méthode de votre choix pour déterminer si la formule suivante est une tautologie. Si vous dites qu'elle n'est pas une tautologie, donner au moins une valuation pour laquelle la formule est fausse.

$$(((P \to Q) \to R) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R)).$$

Solution Utilisons la méthode de l'arbre de vérité

$\neg(((P \to Q) \to R) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R))$ ✓ (1)

$((P \to Q) \to R)$ ✓ de (1) | $\neg((P \to Q) \to R)$ ✓ (2)

$\neg((P \wedge Q) \to R)$ ✓ de (1) | $((P \wedge Q) \to R)$ ✓ (3)

de (3) $(P \wedge Q)$ ✓ | $(P \to Q)$ ✓ de (2) (4)

de (3) $\neg R$ | $\neg R$ de (2) (5)

de (4) P | $\neg P$ de (4) Q (6)

de (4) Q | de (3) $\neg(P \wedge Q)$ ✓ $\quad R$ × | $\neg(P \wedge Q)$ ✓ $\quad R$ × (7)

$\neg(P \to Q)$ ✓ de (2) $\quad R$ × | $\neg P$ de (7) $\neg Q$ | $\neg P$ de (7) $\neg Q$ × (8)

P de (8) (9)

$\neg Q$ de (8) × (10)

Il y a des branches ouvertes, la formule n'est pas une tautologie.
Voici les valuations qui ne satisfont pas la formule

P	Q	R
F	V	F
F	F	F

2. [**5 points**] Utiliser les atomes:

T : Le gouvernement impose de nouvelles taxes
R : Il y a une récession économique
E : Les exportations excèdent les importations
D : Il y a un déficit budjétaire
C : Il y a une augmentation du commerce

pour traduire l'argument suivant du français à la logique propositionnelle (**Vous n'avez pas à vérifier la validité de l'argument**)

Pour que le gouvernement impose de nouvelles taxes, il est necéssaire qu'il y ait une récession économique ou un déficit budjétaire. Pour que les exportations excèdent les importations, il est suffisant que le gouvernement n'impose pas de nouvelles taxes et qu'il y ait une augmentation du commerce. Le gouvernement impose de nouvelles taxes si et seulement si il y a une récession économique ou les exportations excèdent les importations. Alors, il y a un déficit budjétaire à moins que le gouvernement impose de nouvelles taxes.

Solution La traduction de l'argument en symboles logiques est

$$\begin{array}{c} (T \to (R \vee D)) \\ ((\neg T \wedge C) \to E) \\ (T \leftrightarrow (R \vee E)) \\ \hline (D \vee T) \end{array}$$

3. [6 points]

(1) Donner une **preuve indirecte** du théorème suivant:

Si $n^2 + 1$ *est un entier impair, alors* n *est un entier pair.*

(2) Donner une **preuve par contradiction** du théorème suivant:

L'éqaution $x^2 - y^2 = 2$ *n'admet pas des racines entières positives*

(Il faut montrer qu'on ne peut pas trouver deux entiers positifs x et y tels que $x^2 - y^2 = 2$)

Solution (1) (n^2+1 impair $\longrightarrow$ n est pair)

La Contraposée de cette implication est

(n impair $\longrightarrow$ n^2+1 pair)

Supposons que n est impair, alors $n = 2k+1$; $k \in \mathbb{Z}$.

Alors $n^2+1 = (2k+1)^2+1 = 4k^2+4k+1+1 = 2(2k^2+2k+1)$ pair

(2) Supposons qu'il existe deux entiers positifs x, y tels que

$x^2 - y^2 = 1$.

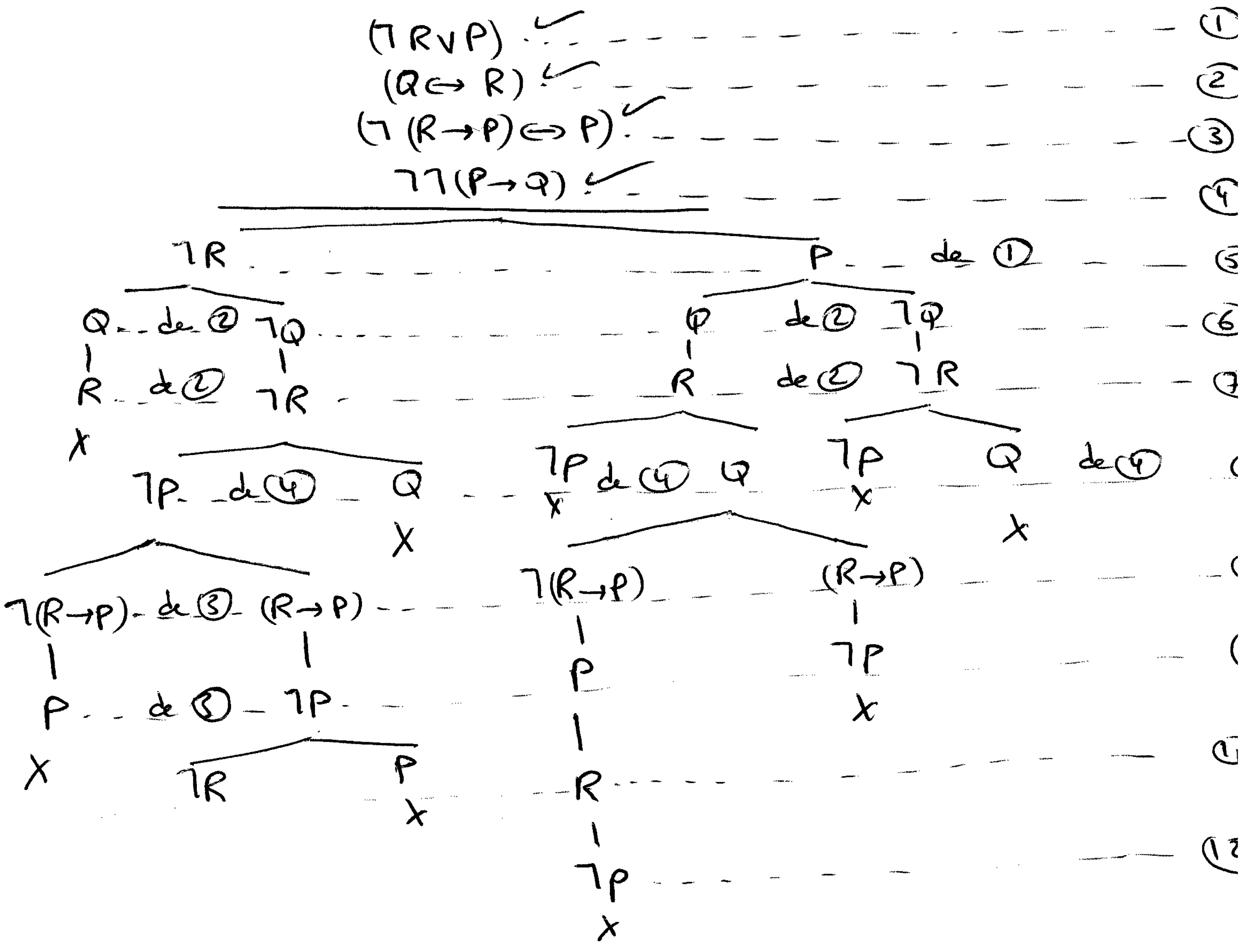
Alors $(x-y)(x+y) = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 3$: Contradiction

car $x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

4. **[5 points]** Utiliser la méthode de votre choix pour décider si l'argument suivant est **valide**. Si vous trouver qu'il n'est pas valide, donner un contre-exemple.

$$\begin{array}{c} (\neg R \vee P) \\ (Q \leftrightarrow R) \\ (\neg(R \to P) \leftrightarrow P) \\ \hline \neg(P \to Q) \end{array}$$

Solution Avec un arbre de vérité :



Il y a une branche ouverte, l'argument n'est pas valide.

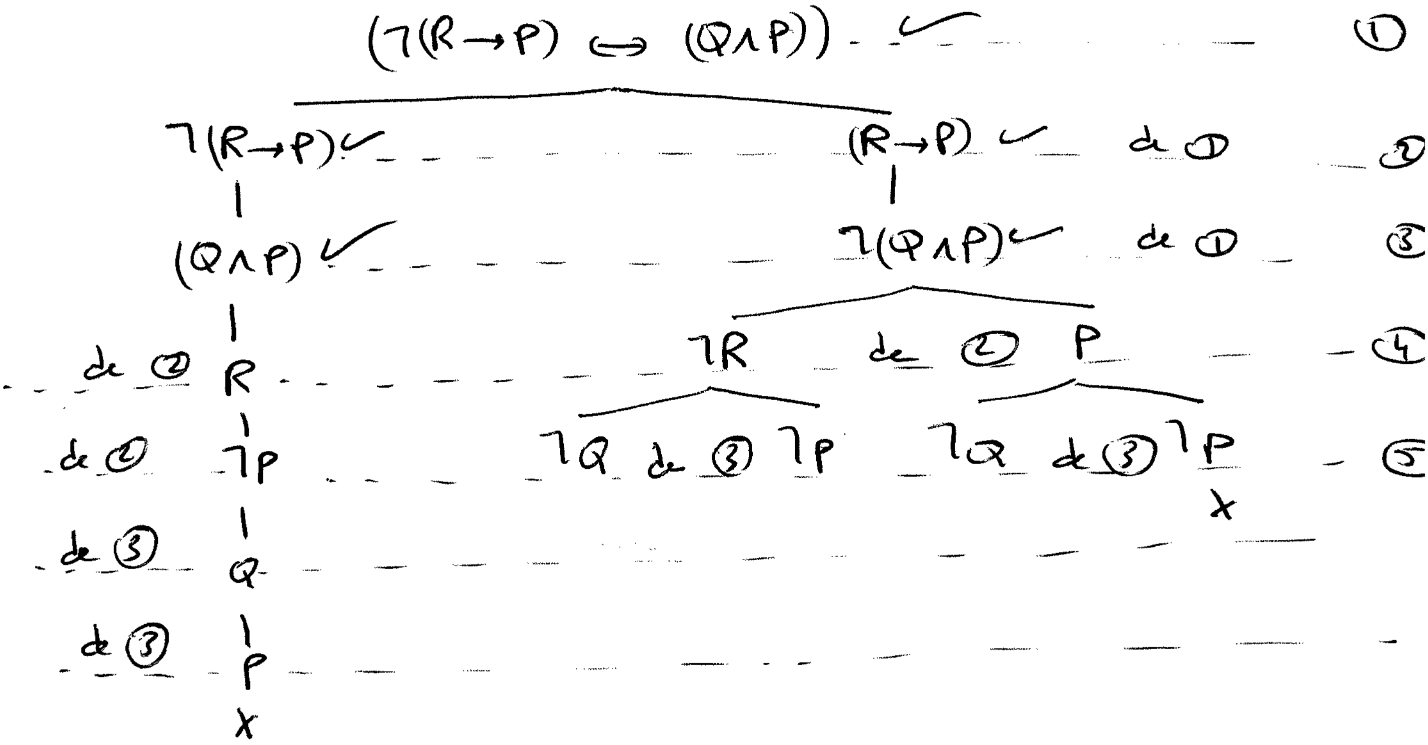
Un contre-exemple est donné par

P	Q	R
F	F	F

5. **[4 points]** Utiliser la méthode de votre choix pour trouver une **FND** équivalente à la formule:

$$(\neg(R \to P) \leftrightarrow (Q \wedge P)).$$

Solution Utilisons un arbre de vérité



une FND équivalente à la formule est alors

$$((\neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q))$$

6. [**5 points**] Utiliser le **principe de l'induction** pour montrer que $2^{4n}-1$ est divisible par 15 pour tout entier $n \geq 0$.

Solution ① Étape de Base $n=0$ $2^{4n}-1=0$: divisible par 15

② Étape inductive Supposons $n \geq 0$

(i) Hypothèse d'induction Supposons que $2^{4n}-1=15k$; $k \in \mathbb{Z}$

(ii) Conclusion À montrer que $2^{4(n+1)}-1$ est divisible par 15

$2^{4(n+1)}-1 = 2^{4n}.2^{4}-1 = 16\,2^{4n}-1 = 16[15k+1]-1$ (par l'hypothèse d'induction) $= 16(15k)+16-1 = 15(16k+1)$: divisible par 15.

Par le principe d'induction, $2^{4n}-1$ est divisible par 15 $\forall n \geq 0$