Introduction au calcul et vecteurs
MAT1739 B- HIVER 2013
Examen pratique 1.
Enseignante: Yasmine Samia
Durée: 80 minutes. Examen à livres fermés

Nom de famille:____________ Prénom:____________

\# d'étudiant: Solutions.

Instructions:

- Vous avez 80 minutes pour compléter l'examen.
- C'est un test à livres fermés. L'utilisation de documents (notes de cours, livres, brouillon, etc.), de téléphones cellulaires ou de tout autre appareil électronique est interdite.
- L'utilisation des calculatrices programmables ou graphiques est complètement interdite. Seules les calculatrices de base authorisées par la faculté des sciences sont permises.
- Lisez chaque question attentivement avant d'y répondre.
- Les questions exigent une solution complète, donc organisez votre temps en conséquence. La réponse correcte exige une justification écrite de manière lisible et logique. Répondez à ces questions dans l'espace fourni. Utilisez le verso des feuilles si nécessaire. Il y a deux feuilles brouillon à la fin du questionnaire.
- Ceci est un examen pratique pour vous donner une idée du format de l'examen partiel et de sa longueur. Il n'y a rien qui dit que les questions seront les mêmes à l'examen partiel.

Question 1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+1}$.

a) En utilisant la définition de la derivée, trouvez la dérivée de $f(x)$.

b) En utilisant votre résultat en (a), trouvez l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 2$.

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3(x+h)^2+1} - \frac{1}{3x^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{3x^2+\cancel{1}-3(x+h)^2-\cancel{1}}{(3x^2+1)[3(x+h)^2+1]}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left[\frac{\cancel{3x^2}-\cancel{3x^2}-3h^2-6xh}{(3x^2+1)[3(x+h)^2+1]}\right].$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}}\cdot\left[\frac{-3\cancel{h}(h+2x)}{(3x^2+1)[3(x+h)^2+1]}\right].$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3(h+2x)}{(3x^2+1)[3(x+h)^2+1]}$$

$$= \frac{-3(+2x)}{(3x^2+1)(3x^2+1)} = \frac{-6x}{(3x^2+1)^2}.$$

b) • Pente de la tgte $= f'(2) = \dfrac{-6(2)}{(3(4)+1)^2} = \dfrac{-12}{13^2} = \dfrac{-12}{169}$

• Pour $x = 2$, $y = f(2) = \dfrac{1}{3(4)+1} = \dfrac{1}{12+1} = \dfrac{1}{13}$.

$$\Rightarrow y = -\frac{12}{169}x + b.$$

$$\frac{1}{13} = -\frac{12}{169}\cdot(2) + b$$

$$\frac{1}{13} = -\frac{24}{169} + b.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{37}{169} = b}$$

Ainsi l'équation de la tgte demandée est :

$$\boxed{y = \frac{-12}{169}x + \frac{37}{169}}.$$

Question 2. Calculez les limites suivantes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{2x-6}-\sqrt{x-3}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{5x-10}{|x-2|}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^2+1}{3x^2+x-1}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

a) $$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{2x-6}-\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3).\left[\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}\right]}{2x-6-(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}.\left[\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}\right]}{\cancel{(x-3)}}.$$

$$= \lim_{x\to 3} \sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3} = \sqrt{6-6}+\sqrt{3-3} = 0.$$

b) • $$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x-2<0 \Rightarrow x<2. \end{cases}$$

• $$\lim_{x\to 2^-} \frac{5x-10}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{5\cancel{(x-2)}}{-\cancel{(x-2)}} = -5.$$

• $$\lim_{x\to 2^+} \frac{5x-10}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{5\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = 5$$

Puisque les $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{5x-10}{|x-2|} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{5x-10}{|x-2|}$,

alors $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{5x-10}{|x-2|}$ n'existe pas.

c) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(-2+\cancel{1/x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\cancel{1/x}-\cancel{1/x^2}\right)} = \frac{-2+0}{3+0-0} = -\frac{2}{3}.$$

Question 3. Trouvez les points critiques de

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

et utilisez le test de la deuxième dérivée pour les classifier.

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.
  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ et $x = 3$ sont les pts critiques.
- Test de la 2e dérivée :

  $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$.

  - $f''(1) = 6(1) - 12 = 6 - 12 = -6 < 0$
    $\Rightarrow$ En $x = 1$, on a un maximum relatif.
  - $f''(3) = 6(3) - 12 = 18 - 12 = 6 > 0$
    $\Rightarrow$ En $x = 3$, on a un minimum relatif.

- $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$. $\Rightarrow (1,4)$ est le max. relatif.
- $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0 \Rightarrow (3,0)$ est le min. relatif.

Question 4. Pour quelles valeurs de a et b la fonction suivante est-elle continue partout sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2, & x \leq -1; \\ bx - a, & -1 < x < 1; \\ x - b, & x \geq 1. \end{cases}$$

- Toutes les branches de f sont des polynômes, donc continues partout. Pour que f soit continue partout sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit continue en -1 et 1.
- Continuité en $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (a-x^2) = a-(-1)^2 = a-1.$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (bx-a) = -b-a.$$

$$f(-1) = a-(-1)^2 = a-1.$$

$\Rightarrow$ Il faut que : $a-1=-b-a \Rightarrow \boxed{2a+b=1}$. (A)

- Continuité en $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (bx-a) = b-a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-b) = 1-b$$

$$f(1) = 1-b$$

$\Rightarrow$ Il faut que $1-b=b-a \Rightarrow \boxed{2b-a=1}$. (B)

- En comparant (A) et (B), on doit avoir :

$$2a+b = 2b-a$$

$$\Rightarrow \boxed{3a = b}$$

- En remplaçant "b" par "$3a$" dans (A), on obtient :

$$2a+3a = 1$$

$$5a = 1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{5}} \Rightarrow b = 3\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{5}}$$

Question 6. Trouvez les dérivées des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 3x + 1)^3 \quad = x^{1/2} \cdot (x^2+3x+1)^3$

b) $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - x}} \quad = \dfrac{x+1}{(x^2-x)^{1/2}}$

a)
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \cdot (x^2+3x+1)^3 + x^{1/2} \cdot 3 \cdot (x^2+3x+1)^2 \cdot (2x+3)$$
$$= x^{-1/2} \cdot (x^2+3x+1)^2 \cdot \left[\frac{1}{2}(x^2+3x+1) + 3x \cdot (2x+3)\right].$$
$$= \frac{(x^2+3x+1)^2}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + 6x^2 + 9x\right].$$
$$= \frac{(x^2+3x+1)^2}{\sqrt{x}}\left[\frac{13}{2}x^2 + \frac{21}{2}x + \frac{1}{2}\right].$$
$$= \frac{(x^2+3x+1)^2(13x^2+21x+1)}{2\sqrt{x}}$$

b)
$$g'(x) = \frac{(1) \cdot (x^2-x)^{1/2} - \frac{1}{2}(x^2-x)^{-1/2} \cdot (2x-1) \cdot (x+1)}{(x^2-x)}.$$
$$= \frac{(x^2-x)^{-1/2}\left[x^2-x-\frac{1}{2}(2x-1)(x+1)\right]}{x^2-x}$$
$$= \frac{x^2-x-\frac{1}{2}(2x^2+2x-x-1)}{(x^2-x)^{3/2}}$$
$$= \frac{\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}-x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{(x^2-x)^{3/2}}.$$
$$= \frac{-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}{(x^2-x)^{3/2}} = \frac{-3x+1}{2(x^2-x)^{3/2}}.$$

Question 5. Soit $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 3x - 2$.
a) Trouvez le domaine de définition de f
b) Trouvez les intersections du graphe de f avec les axes des coordonnées.
c) Trouvez les asymptôtes (horizontales et verticales, s'il y en a) de f.
d) Calculez f'. Trouvez ensuite les points critiques de f et les intervalles de croissance et décroissance de f.
e) Calculez f''. Trouvez ensuite les intervalles de concavité et les points d'inflexion.
f) Tracez le graphe de f dans la grille de la page suivante

(a) $D_f = \mathbb{R}$

(b) • Ord. à l'origine $(x=0)$ $\Rightarrow f(0) = -2 \rightarrow (0,-2)$.

• Abcisse à l'origine $(y=0)$ $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow -2x^3+3x^2+3x-2=0$

Par le théorème du zéro rationnel, on remarque que $x=-1$ est une racine de ce polynôme. Donc $(x+1)$ est le 1er facteur de $f(x)$.

Par la division polynomiale, on obtient :

$$f(x) = (x+1)(-2x^2+5x-2)$$
$$= (x+1)(-2)\cdot\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(x-2)$$
$$= -2(x+1)(x-2)(x-\tfrac{1}{2})$$

Factoriser $-2x^2+5x-2$

Donc les abcisses à l'origine sont $x=-1$, $x=2$ et $x=\tfrac{1}{2}$.

(c) AV et AH : Aucune (fct polynôme).

(d) • $f'(x) = -6x^2+6x+3$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4(-6)(3)}}{2(-6)} = \frac{-6 \pm \sqrt{108}}{-12}$$
$$= \frac{-6 \pm 6\sqrt{3}}{-12} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{-2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc les pts critiques sont donnés par :

$$x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

(Brouillon)

x		$\frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}36$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}36$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}6$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$	$\searrow$

Donc on a un Min. Rel en $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ et un Max. Rel. en $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

(e). $f''(x) = -12x + 6 = 6(-2x+1)$.

$f''(x) = 0 \rightarrow -2x+1 = 0 \rightarrow x = 1/2$.

x		$1/2$	
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	0	$\cap$

$\rightarrow$ Donc le pt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un pt d'inflexion de f.