MATHÉMATIQUES DISCRÈTES (MAT1748)
EXAMEN PARTIEL (Hiver 2013)

Professeur: Joseph Khoury. **Durée: 80 minutes**

Nom de famille: Solution

Prénom: ____________________

Numéro d'étudiant: ____________________

Aucune note n'est permise.
Les calculatrices sont permises.

Cet examen comporte 9 questions et 10 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 25 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5

Les questions 6 à 9 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages si vous manquez d'espace au recto et les deux pages additionnelles à la fin.

1. Le tableau de vérité d'une formule logique p (dont les atomes sont A, B et C) est:

A	B	C	p
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

Parmi les formules suivantes, une seule est une FNC équivalente à p, laquelle?

A. $((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C))$
B. $((\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C))$
C. $((\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C))$
D. $((A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C))$
E. $((\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C))$
F. $((A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C))$

Solution On considère les lignes où $v(p)=F$. Chacune de ces lignes nous donne une clause disjonctive dans une FNC équivalente à p:
$(\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$

2. On rencontre deux habitants A et B sur l'île des chevaliers et des Coquins. L'habitant A dit: *Si B est un chevalier, alors je suis un coquin.* Parmi les énoncés suivants, un seul est **vrai**, lequel?

(1) A est un coquin et B est un chevalier
(2) A est un chevalier et B est un coquin
(3) A et B sont des chevaliers
(4) A et B sont des coquins
(5) A est un chevalier mais on ne peut pas déterminer la nature de B
(6) B est un chevalier mais on ne peut pas déterminer la nature de A

A. (4) B. (6) C. (1) D. (2) E. (5) F. (3)

Solution A dit « (B chevalier $\longrightarrow$ A coquin) ». Deux cas

Cas 1 A coquin $\Rightarrow$ v(B chevalier) = V et v(A coquin) = F: $\lightning$

Cas 2 A chevalier $\Rightarrow$ v(B chevalier $\to$ A coquin) = V. Comme v(A coquin) = F dans ce cas, v(B chevalier) = F. Donc B coquin. Alors A chevalier et B coquin

3. Si A est un ensemble contenant 4 éléments, alors la cardinalité de **l'ensemble-puissance** de $A \times A$ est:

A. Aucune de ces réponses
B. 2^8
C. 16
D. 4^{16}
E. 4^2
F. 2^{16}

Solution $|A \times A| = |A| \cdot |A| = 4^2 = 16$.

Alors $|\mathcal{P}(A \times A)| = 2^{16}$

4. Parmi les énoncés suivants, lesquels sont **vrais**?

(1) $(p \to (p \vee q))$ est une tautologie.

(2) Les deux formules $(\neg p \to \neg q)$ et $(p \to q)$ sont logiquement équivalentes.

(3) Les deux formules $(p \vee (q \wedge r))$ et $((p \vee q) \wedge r)$ sont logiquement équivalentes.

(4) Les deux formules $\neg(p \to q)$ et $(p \wedge \neg q)$ sont logiquement équivalentes.

(5) $(p \to \neg p)$ est une tautologie.

(6) Si p est vrai, q est faux et r est faux, alors $(p \to (q \vee r))$ est vrai.

A. (1) et (4)
B. (1) et (5)
C. (2) et (6)
D. (3) seulement
E. (4) seulement
F. (1) seulement

Solution (1) Vrai si $v(p) = F \Rightarrow v(p \to (p \vee q)) = V$ et si $v(p) = V$, alors $v(p \vee q) = V \Rightarrow v(p \to (p \vee q)) = V$

(2) Faux $(\neg p \to \neg q) \equiv (\neg\neg q \to \neg\neg p) \equiv (q \to p) \not\equiv (p \to q)$

(3) Faux $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \not\equiv ((p \vee q) \wedge r)$

(4) Vrai $\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)$

(5) Faux si $v(p) = V \Rightarrow v(\neg p) = F \Rightarrow v(p \to \neg p) = F$.

(6) Faux $v(q \vee r) = F$ et $v(p) = V \Rightarrow v(p \to (q \vee r)) = F$.

5. Considérer les atomes suivants:

L : Le tigre se cache
B : La chasse se termine bientôt
M : Le chasseur est mangé par le tigre
N : La chasse se poursuit dans la nuit

Laquelle des formules suivantes est une traduction de la phrase:

pour que le chasseur ne soit pas mangé par le tigre et que la chasse se termine bientôt, il est nécessaire que le tigre se cache à moins que la chasse se poursuit dans la nuit.

A. $((L \vee N) \leftrightarrow (\neg M \wedge B))$
B. Aucune de ces réponses
C. $((\neg M \wedge B) \leftrightarrow (L \vee N))$
D. $((\neg M \wedge B) \rightarrow (L \vee N))$
E. $((\neg M \wedge B) \rightarrow \neg(L \vee N))$
F. $((L \vee N) \rightarrow (\neg M \wedge B))$

Solution $((\neg M \wedge B) \longrightarrow (L \vee N))$

6. [**3 points**] Donner une FND équivalente à la formule:

$$(((A \to B) \to C) \to \neg(A \to (C \vee A))).$$

Solution on utilise la méthode de l'arbre de vérité

$(((A \to B) \to C) \to \neg(A \to (C \vee A)))$ ✓ (1)

$\neg((A \to B) \to C)$ ✓ de (1) — $\neg(A \to (C \vee A))$ (2)

$(A \to B)$ de (2) — A de (2) (3)

$\neg C$ de (2) — $\neg(C \vee A)$ de (2) (4)

$\neg A$ de (3) B — $\neg C$ de (4) (5)

$\neg A$ de (4) (6)

×

Chaque branche ouverte nous donne une clause conjonctive :

une FND équivalente est alors :

$((\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C))$

7. [**4 points**] Utiliser la méthode de votre choix pour décider si l'argument suivant est **valide**. Si vous trouver qu'il n'est pas valide, donner un contre-exemple.

$$\begin{array}{c} (B \leftrightarrow C) \\ ((C \to \neg A) \leftrightarrow \neg A) \\ (C \to A) \\ \hline \neg(A \wedge B) \end{array}$$

<u>Solution</u> Par l'arbre de vérité:

$(B \leftrightarrow C)$ ✓ (1)

$((C \to \neg A) \leftrightarrow \neg A)$ (2)

$(C \to A)$ ✓ (3)

$\neg\neg(A \wedge B)$ ✓ (4)

A de (4) (5)

B de (4) (6)

B de (1) | $\neg B$ (7)

C de (1) | $\neg C$ × (8)

$\neg C$ × de (3) | A (9)

$(C \to \neg A)$ de (2) | $\neg(C \to \neg A)$ ✓ (10)

$\neg A$ × de (2) | $\neg\neg A$ (11)

C de (10) (12)

$\neg\neg A$ de (10) (13)

Il y une branche ouverte. L'argument n'est pas valide. Un contre-exemple de l'argument est

A	B	C
V	V	V

8. **[4 points]** Soit x un nombre réel non négatif. Donner une **preuve indirecte** du théorème suivant:

Si x n'est pas rationnel, alors $\sqrt{x+2}$ n'est pas rationnel.

<u>Solution</u> $(x \notin \mathbb{Q} \to \sqrt{x+2} \notin \mathbb{Q})$. La contraposée est

$(\sqrt{x+2} \in \mathbb{Q} \to x \in \mathbb{Q})$.

Supposons alors que $\sqrt{x+2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{x+2} = \frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$. Alors $x+2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b^2} - 2 = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2} \in \mathbb{Q}$ car $a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Z}$ et $b^2 \in \mathbb{Z}$ et $b^2 \neq 0$.

9. [**4 points**] Utiliser le **principe de l'induction** pour montrer que $16^n - 1$ est divisible par 15 pour tout entier $n \geq 0$.

Solution Deux étapes à montrer.

① Étape de Base $n=0$ $16^n - 1 = 1 - 1 = 0$: divisible par 15

② Étape inductive $n \geq 0$

(i) Hypothèse d'induction on suppose que $16^n - 1$ est divisible par 15.

Alors $16^n - 1 = 15k$; $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Conclusion $16^{n+1} - 1$ est divisible par 15 :

$16^{n+1} - 1 = 16^n \cdot 16 - 1 = (15k+1)16 - 1$ par hypothèse d'induction.

$\Rightarrow 16^{n+1} - 1 = (15)(16)k + 16 - 1 = 15[16k+1]$: divisible par 15.

Par le principe d'induction, $16^n - 1$ est divisible par 15.