Examen[1] de partique I

Professor: Abdelkrim El basraoui

- **Question 1:**
  Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix}$. Trouvez les valeurs de $x,\ y$ et z pour que A soit sous forme échelonnée réduite. (ici il s'agit seulement de voir quelles valeurs de $x,\ y$ et z donnent une matrice sous forme échelonnée réduite).
  Solution:
  $x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
- **Question 2:**
  Quelles parmis les matrices suivantes repésente la matrice des coéfficients d'un système linéaire avec une solution unique. (Pour votre information tous les système associés à ces matrices sont compatibles).
  $$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$
  Solution: Seulement B.
- **Question 3:**
  Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants:
  $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ -h^2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ h \end{bmatrix}$. Trouvez les valeurs de h pour lesquelles le vecteur $\overrightarrow{b} \notin \mathcal{L}(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

  Solution: $h = 3$.

- **Question 4:**
  On considère le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 1 \end{cases}$$

[1] Il y aura environ 8 questions dans le mi-session. Cet examen est juste à titre de réference

(1) Donnez la matrice augmentée de ce système.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

(2) En utilisant l'algorithme décrit en classe trouvez la matrice échelonnée réduite de la matrice augmentée de ce système. (Il faut préciser toutes les opérations que vous faites.)
La matrice échelonnée réduite est:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Il faut faire les opérations suivantes:
$L_3 \to L_3 - L_1$; $L_3 \to L_3 - L_2$ pour la matrice échelonnée, puis $L_3 \to -L_3$; $L_2 \to L_2 - L3$; $L_1 \to L_1 + L_3$; $L_1 \to L_1 + L_2$ pour la matrice échelonnée réduite.

(3) Écrivez la solution générale trouvée dans la question précédente sous forme paramétrique.
Les variables de base sont, d'après 1, x_1, x_2 et x_3 et x_4 et x_5 sont libres. On pose $x_4 = s$ et $x_5 = t$. La solution sous-forme paramétrique est donc

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t \\ s+t \\ 1 \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

où $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.
Géométriquement, la solution est un plan passant par le point (2,0,1,0,0) et "engendré" par les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- **Question 5:**

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(1) Donnez l'argument qui justifie la validité de l'opération $A\overrightarrow{b}$; c-à-d le produit de A avec $\overrightarrow{b}$.
C'est possible car le nombre de colonnes de A est égale à celui des lignes de $\overrightarrow{b}$.

(2) Calculez le produit $A\overrightarrow{b}$. (Donnez les détails du calcul).
$A\overrightarrow{b} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$

- **Question 6:**
On considère le système linéaire homogène suivant:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

(1) Résolvez ce systéme homogéne.
La matrice augmentée est (j'ignore la colonne des constantes car il n'y a que des zeros et rien ne se passera au niveau de cette colonne)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les opérations sont: $L_3 \to L_3 - L_1$; $L_3 \to L_3 - L_2$; $L_1 \to L_1 - 2L_2$. Donc les variables de bases sont x_1, x_2 et x_3 est libre. La solution générale est

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \quad \textit{libre} \end{cases}$$

(2) En déduire la forme paramétrique de la solution générale trouvée dans la question précédente.
Sous forme paramétrique la solution est donc: on pose $x_3 = s,\ s \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s \\ -2s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$$

[N.B.: géométriquement, c'est une droite passant par l'origine et diregée par vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$].

(3) Soit $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ une solution particulière de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, où A représente la matrice des coéfficients du système homogène initial. Donnez la solution générale de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

On a vu que la solution de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ est

$$\overrightarrow{x} = s \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R}.$$

Donc la solution générale de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, étant donné la solution particulière $\overrightarrow{p}$, est donc

$$\overrightarrow{x} = s \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \overrightarrow{p} = s \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R}.$$

Notez que la connaissance de $\overrightarrow{b}$ n'est pas nécessaire.

[N.B.: géométriquement, c'est une droite passant par le point $(1,2,3)$ et diregée par vecteur $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$].

- **Question 9:**

Trouvez les valeurs de h et k le système linéaire suivant est:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ hx_1 - 3x_2 + x_3 = k \end{cases}$$

(1) incompatible;
(2) compatible avec solution unique;
(3) compatible avec infinité de solutions.

Vu en classe !!!

- **Question 10:**

N'oubliez pas les enoncés vrai/faux.