

**Introduction à l'Algèbre linéaire** (MAT1741 A)  
**EXAMEN PARTIEL PRATIQUE I** (13 Octobre 2012)  
**Professeur: Joseph Khoury** Durée: 80 minutes

Nom de famille: Solubim

Prénom: \_\_\_\_\_

Numéro d'étudiant: \_\_\_\_\_

**Aucune note n'est permise.  
Les calculatrices ne sont pas permises.**

Cet examen comporte 7 questions et 8 pages. Les questions à choix multiples (1 à 4) valent chacune 2 points sur les 24 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4

Les questions 5 à 7 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages si vous manquez d'espace au recto et les deux pages additionnelles à la fin.

1. Le rang de la matrice des coefficients d'un système linéaire homogène à 250 équations et 300 inconnues est supérieur ou égal à 100. Répondre aux questions suivantes.

- (1) Le système peut-il avoir une solution unique?
- (2) Le système peut-il avoir une infinité de solutions?
- (3) Le système peut-il être incompatible?
- (4) Si le système est compatible, quel le nombre maximal de paramètres dans sa solution générale?

- A. Oui, Oui, Non, 150      B. Non, Non, Non, 200      C. Non, Oui, Oui, 200  
 D. Non, Oui, Non, 150      E. Non, Oui, Non, 200      F. Non, Oui, Non, 50

Solution  $\text{rg}(A) \geq 100 \Rightarrow -\text{rg}(A) \leq -100 \Leftrightarrow 300 - \text{rg}(A) \leq 300 - 100 = 200$

Mais # paramètres = # inconnues -  $\text{rg}(A)$ , donc # paramètres  $\leq 200$

- (1) Non, car solution unique  $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}[A|B] = 300$ . Mais  $\text{rg}(A) \leq 250$
- (2) Oui car infinité de solutions  $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}[A|B] < 300$
- (3) Non, car c'est un système homogène, toujours compatible.
- (4) # paramètres = # inconnues -  $\text{rg}(A) \leq 300 - 100 = 200$

2. Considérer les trois matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trouver l'entrée à la deuxième ligne et troisième colonne de la matrice  $A^{-1}(B^T)^{-1}C$ .

- A. 2      B. Aucune des autres réponses  
 C. -3      D. -4  
 E. 1      F. 5

Solution  $A^{-1} = \frac{1}{2(3) - 1(5)} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (B^T)^{-1} = \frac{1}{1(1) - 0(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}(B^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Alors l'entrée à la 2}^{\text{e}} \text{e ligne}$$

$$\text{et 3}^{\text{e}} \text{e colonne de } A^{-1}(B^T)^{-1}C = 2^{\text{e}} \text{e ligne de } A^{-1}(B^T)^{-1} \times 3^{\text{e}} \text{e colonne de } C \\ = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 4$$



5. [5 points] Considérer la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Utiliser l'Algorithme de Gauss-Jordan pour trouver  $A^{-1}$ .  
 (b) Utiliser la réponse à la partie (a) pour trouver une matrice  $B$  qui satisfait

$$(2B^T + 3I_3)^{-1} = 2A^T$$

où  $I_3$  est la matrice identité d'ordre 3.

- (c) Utiliser la réponse à la partie (a) pour résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

Solution (a)  $[A|I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad \text{Alors } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)  $(2B^T + 3I_3)^{-1} = (2A^T) \Rightarrow 2B^T + 3I_3 = (2A^T)^{-1} = \frac{1}{2} (A^T)^{-1} = \frac{1}{2} (A^{-1})^T$

$\Rightarrow 2B^T = \frac{1}{2} (A^{-1})^T - 3I_3$  et alors  $B^T = \frac{1}{4} (A^{-1})^T - \frac{3}{2} I_3 \Rightarrow B = \left( \frac{1}{4} (A^{-1})^T - \frac{3}{2} I_3 \right)^T$

$$= \frac{1}{4} A^{-1} - \frac{3}{2} I_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & -3/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -5/4 \end{bmatrix}$$

(c) Le système s'écrit sous la forme  $AX = B$  où  $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Alors

Comme  $A$  est inversible, le système admet la solution unique  $X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{D'où } x = -3, y = -4 \text{ et } z = 3$$

6. [5 points]

Considérer le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = -2 \\ 2x - y = 7 \\ 7x - 6y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 19 \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un nombre réel.

(1) Trouver les valeurs de  $\alpha$  telles que le système:

- (i) admet une solution unique
- (ii) admet une infinité de solutions,
- (iii) est incompatible.

(2) Dans le (ii),

(a) donner la solution générale du système,

(b) donner une description géométrique complète de cette solution.

Solution (1) La matrice augmentée du système est

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ 7 & -6 & \alpha^2 - 14 & \alpha + 19 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha + 5 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & \alpha + 2 \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & \alpha + 2 \end{array} \right] \quad (*) \end{aligned}$$

(i) solution unique  $\Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg } [A|B] = 3 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \pm 2$

(ii) infinité de solution  $\Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg } [A|B] = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0$  et  $\alpha + 2 = 0$   
 $\Rightarrow \alpha = \pm 2$  et  $\alpha = -2$ . Alors  $\alpha = -2$

(iii) système incompatible  $\Leftrightarrow \text{rg } A \neq \text{rg } [A|B] \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0$  et  $\alpha + 2 \neq 0$   
 $\Rightarrow \alpha = \pm 2$  et  $\alpha \neq -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$ .

(2) Dans le cas (ii), on a  $\alpha = -2$ , d'où la forme (\*) devient

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad z = t \text{ et libre, } x = -2t + 5, y = -4t + 3$$

(b)  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  droite passant par le point  $(5, 3, 0)$  et parallèle au vecteur  $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ .



$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{Alors } z = t \text{ et libre et on a:}$$

$$x = -t + 9, \quad y = t - 4$$

La solution générale est alors  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $t$  entier  $\geq 0$ .

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow -t + 9 \geq 0 \Rightarrow t \leq 9 \\ y \geq 0 \Rightarrow t - 4 \geq 0 \Rightarrow t \geq 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \leq t \leq 9 \quad \text{et } t \text{ est un entier}$$

$$\underline{t=4} \rightarrow x=5, y=0, z=4$$

$$\underline{t=5} \rightarrow x=4, y=1, z=5$$

$$\underline{t=6} \rightarrow x=3, y=2, z=6$$

$$\underline{t=7} \rightarrow x=2, y=3, z=7$$

$$\underline{t=8} \rightarrow x=1, y=4, z=8$$

$$\underline{t=9} \rightarrow x=0, y=5, z=9$$

$$(4) \text{ Le Coût total est } C = 7x + 3y + 2z = 7(-t + 9) + 3(t - 4) + 2t = -2t + 51. \text{ Comme } 4 \leq t \leq 9 \Rightarrow \text{le coût minimal est}$$

lorsque  $t=9$ , ce qui correspond à la combinaison

$x=0, y=5, z=9$ : seulement 5 pilules de marque II et 9 pilules de marque III.

Le coût minimal est  $C = -2(9) + 51 = 33$  ₣ par jour.